

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE
AUTOMAÇÃO E SISTEMAS**

Lie Pablo Grala Pinto

**ESTIMAÇÃO DE VARIÁVEIS DE ESTADO E PARÂMETROS
BASEADA EM OBSERVADORES CHAVEADOS**

Florianópolis

2015

Lie Pablo Grala Pinto

**ESTIMAÇÃO DE VARIÁVEIS DE ESTADO E PARÂMETROS
BASEADA EM OBSERVADORES CHAVEADOS**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação
em Engenharia de Automação e Sistemas
para a obtenção do Grau de Doutor.
Orientador: Alexandre Trofino Neto, Dr.

Florianópolis

2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Pinto, lie Pablo Grala

Estimação de Variáveis de Estado e Parâmetros Baseada em
Observadores Chaveados / lie Pablo Grala Pinto ;
orientador, Alexandre Trofino - Florianópolis, SC, 2015.
131 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia de Automação e Sistemas.

Inclui referências

1. Engenharia de Automação e Sistemas. 2. Observadores
Chaveados. 3. Estimação de Parâmetros. 4. Estimação de
Variáveis de Estado. 5. Modos Deslizantes. I. Trofino,
Alexandre. II. Universidade Federal de Santa Catarina.
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e
Sistemas. III. Título.

ESTIMAÇÃO DE VARIÁVEIS DE ESTADO E PARÂMETROS BASEADA EM OBSERVADORES CHAVEADOS

Lie Pablo Grala Pinto

Esta Tese foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Doutor”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.

Alexandre Trofino Neto, Dr.
Orientador

Rômulo Silva de Oliveira, Dr.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas

Banca Examinadora:

Alexandre Trofino Neto, Dr.
Presidente

Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, Dr. – DEE / FEIS / UNESP

Alexandre Sanfelice Bazanella, Dr. – PPGEE / UFRGS

Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr. – UFSC / DAS

Hector Bessa Silveira, Dr. – UFSC / DAS

Rodolfo César Costa Flesch, Dr. – UFSC / DAS

Este trabalho é dedicado aos meus amigos, colegas de classe e aos meus queridos pais.

AGRADECIMENTOS

Desejo agradecer ao meu orientador Prof. Dr. Alexandre Trofino, pela atenção dispensada, paciência e dedicação.

Agradeço imensamente ao meu orientador de trabalho de conclusão de curso Jorge A. V. Ale e orientador de mestrado Igor P. Simakov.

Agradeço também à minha família, em particular, aos meus pais pelo zelo e amparo.

Agradeço também aos meus amigos e colegas de classe pelo apoio e momentos compartilhados.

O princípio do conhecimento é a descoberta
de algo que não entendemos.

Frank Herbert, (1920 - 1986)

RESUMO

Neste trabalho propõe-se uma técnica para estimação conjunta das variáveis de estado e parâmetros de sistemas dinâmicos. A estimação baseia-se em um observador chaveado cujo ganho e lei de chaveamento são determinados através da resolução de um problema de inequações lineares de matriz (LMI em inglês). O método não requer nenhuma representação específica no espaço do estado para que seja aplicado e no caso onde nenhum parâmetro precisa ser estimado o método reduz-se a um observador Luenberger padrão. Considera-se que a classe de sistemas afins e os parâmetros do modelo a serem estimados são supostamente limitados por um politopo conhecido. Sob certas condições, que são verificadas através da resolução de um problema de LMI, garante-se que os erros de estimação de parâmetro e de variáveis de estados convergem para zero. Quando essas condições de convergência do erro de estimação de parâmetros não são verificadas, propõem-se condições alternativas para a estimação robusta de estados.

Palavras-chave: Observadores Chaveados. Estimação de Parâmetros. Estimação de Variáveis de Estado. Modos Deslizantes. Observador Robusto.

ABSTRACT

In this work it is proposed a technique for joint estimation of the state variables and parameters of dynamic systems. The estimation is based on a switched observer whose gain and switching rule are determined by solving a linear matrix inequalities (LMI) problem. The method does not require a specific state space representation of the system to be applied and the case where no parameter is needed to be estimated, the method reduces to a standard Luenberger observer. The class of affine systems is considered and the parameters of the model to be estimated are assumed to be bounded by a given polytope. Under certain conditions, that are checked by solving an LMI problem, the state variables and parameters estimation errors are guaranteed to converge to zero. When the conditions for the convergence to zero of the parameter estimation error are not met, we propose alternative conditions for robust state estimation.

Keywords: Switched Observers. Parameter Estimation. State Estimation. Sliding Mode. Robust Observer.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Politopo dos parâmetros	36
Figura 2	Politopo das matrizes	36
Figura 3	Solução de (2.5) atravessa $\varsigma = 0$	40
Figura 4	Solução de (2.5) permanece em $\varsigma = 0$	40
Figura 5	Sistema LTI com Observador de Luenberger.....	48
Figura 6	Observador chaveado com entrada desconhecida.....	71
Figura 7	Observador chaveado com entrada conhecida.....	71
Figura 8	Estado do sistema l e ω e o erro de saída $\varepsilon = x_1 - z_1$	83
Figura 9	Estimação do parâmetro λ_0	83
Figura 10	Estimação da entrada de torque	84
Figura 11	Erro de estimação da entrada de torque	85
Figura 12	Sistema de duas massas, mola e atrito viscoso	97
Figura 13	Convergência do erro de saída com e sem o critério de custo garantido	99
Figura 14	Convergência do parâmetro com e sem o critério de custo garantido. $k_a = \theta_1 2,5 + \theta_2 3,5$	99
Figura 15	Estimação da entrada desconhecida de força com e sem o critério de custo garantido. $F = \theta_1 1,5 + \theta_2 2,5$	100
Figura 16	Sistema de duas massas, mola e atrito viscoso	115
Figura 17	Três vértices do politopo Θ_3 abrangendo $F \in [0, 5; 1, 5]$ e $k_a \in [1, 5; 2, 5]$	116
Figura 18	Saída medida (y_1 : superior, y_2 : intermediária e y_3 : inferior) e suas respectivas estimativas (linha tracejada).....	117
Figura 19	Estados reais (linhas contínuas) e suas estimações (linhas tracejadas) para $x(0) = (0, 1; 0; 0, 2; 0)$, $z(0) = 0$ com agindo após 15s. ...	118
Figura 20	Estimações \hat{k}_a e \hat{F} e seus valores verdadeiros (linhas tracejadas). O passo de integração é de 1ms e o intervalo de média móvel é de $T = 200$ ms.....	119
Figura 21	Três vértices do politopo abrangendo $b_a \in \text{Co}\{2, 5; 3, 5\}$ e $b_b \in \text{Co}\{2, 5; 3, 5\}$	120
Figura 22	Saída medida (y_1 : superior, y_2 : intermediário e y_3 : inferior) e suas respectivas estimativas (linha tracejada).....	120
Figura 23	Parâmetros estimados $b_a = 2,5\theta_1 + 4,5\theta_2 + 2,5\theta_3$ e $b_b = 2,5\theta_1 + 2,5\theta_2 + 4,5\theta_3$ obtidos a partir de (6.31). O passo de integração é de 1ms	

e o intervalo de média móvel é $T = 200\text{ms}$ 121

Figura 24 Estimações \hat{k}_a e \hat{F} e seus valores verdadeiros (linhas tracejadas). O período de amostragem é de 40ms e período de média móvel é de $T = 800\text{ms}$. O distúrbio é removido após 250s. 122

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{Co}\{\cdot\}$	Invólucro convexo;
$\mathbf{tr}(A)$	Traço da matriz A ;
A'	Transposto da matriz A ;
A^*	Conjugado transposto da matriz A ;
\mathbb{R}^n	Espaço Euclidiano de dimensão n ;
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto de matrizes reais de dimensão $n \times m$;
$\ \cdot\ $	Norma euclidiana de vetores ou norma espectral de matrizes;
$\ w(t)\ _2$	Norma-2 de sinais ao quadrado integráveis, definida como $\ w(t)\ _2 = \sqrt{\int_0^\infty w(t)'w(t)dt}$;
\mathcal{L}_2	Espaço das funções quadraticamente integráveis;
\star	Partição de uma matriz a ser deduzido através da simetria;
$\mathbf{0}_n, \mathbf{0}_{m \times n}$	Matrizes $n \times n$ e $m \times n$ de elementos nulos;
I_n	Matriz identidade de dimensão n ;
$\mathbf{1}_n, \mathbf{1}_{m \times n}$	Matrizes $n \times n$ e $m \times n$ de elementos unitários;
$A > 0$	A Matriz simétrica positiva definida;
$A < 0$	A Matriz simétrica negativa definida;
$\lambda_{\max}(\cdot)$	Máximo autovalor de uma matriz simétrica;
$\lambda_{\min}(\cdot)$	Mínimo autovalor de uma matriz simétrica;
\mathbb{I}_m	Conjunto de inteiros $\{1, \dots, m\}$;
$\mathcal{P}(\mathbb{I}_m)$	Conjunto de partes ou conjunto potência de \mathbb{I}_m ;
$\max_{i \in \mathbb{I}_m} \{v_i\}$	Máximo elemento do conjunto $\{v_1, \dots, v_m\}$;
$\langle A \rangle$	Para uma matriz quadrada A , $\langle A \rangle := A + A'$;
$\mathit{diag}\{Y_i\}$	Matriz bloco diagonal formado pelas matrizes Y_i ;

$\arg \max_{i \in \mathbb{I}_m} \{v_i\}$ Conjunto de todos os índices i tal que $V = v_i$, sendo $V = \max_{i \in \mathbb{I}_m} \{v_i\}$;

Θ_m Simplex unitário de dimensão m tal que $\Theta_m := \{\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m \theta_i = 1, \theta_i \geq 0\}$;

$A_\theta, A_{\theta \pm \lambda}$ Elemento do invólucro convexo de $\{A_1, \dots, A_m\}$, ou seja $A_\theta := \sum_{i=1}^m A_i \theta_i$ e $A_{\theta \pm \lambda} := A_\theta \pm A_\lambda$.

LISTA DE ABREVIATURAS

A/D	Analógico-digital;
D/A	Digital-analógico;
CC	Corrente contínua;
EKF	<i>Extended Kalman Filter</i> (Filtro Estendido de Kalman);
LMI	<i>Linear Matrix Inequalities</i> (Inequações Matriciais Lineares);
LTl	<i>Linear Time-Invariant</i> (Linear e Invariante no Tempo);
MIMO	<i>Multiple-input Multiple-output</i> (Múltiplas entrada e múltiplas saída, referindo-se geralmente à sistemas);
SM	<i>Sliding Modes</i> (Modos deslizantes);
PWM	<i>Pulse-Width Modulation</i> (Modulação por Largura de Pulso);
SISO	<i>Single-input Single-output</i> (Uma entrada e uma saída, referindo-se geralmente à sistemas);

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	27
1.1	OBJETIVOS	28
1.1.1	Objetivos Gerais	28
1.1.2	Objetivos Específicos	28
1.2	ESTIMAÇÃO DE ESTADOS	29
1.3	IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS	31
1.4	ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO	32
2	DEFINIÇÕES E RESULTADOS AUXILIARES	35
2.1	SISTEMAS POLITÓPICOS	35
2.2	SISTEMAS CHAVEADOS	37
2.3	RESULTADOS AUXILIARES	40
2.3.1	Anuladores Lineares	41
2.3.2	Lema de Finsler	41
3	ESTIMAÇÃO DE VARIÁVEIS DE ESTADOS	43
3.1	OBSERVABILIDADE	43
3.2	OBSERVADORES DE LUENBERGER	47
3.3	FILTRAGEM	49
3.3.1	Filtro \mathcal{H}_2	49
3.3.2	Filtro \mathcal{H}_∞	52
3.4	OBSERVADOR ROBUSTO	53
4	IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS	59
4.1	EXCITAÇÃO PERSISTENTE	59
4.2	MÍNIMOS QUADRADOS	61
5	OBSERVADORES CHAVEADOS	67
6	ESTIMAÇÃO DE ESTADOS E PARÂMETROS	73
6.1	EXEMPLO NUMÉRICO	82
7	ESTIMAÇÃO DE ESTADOS E PARÂMETROS COM CUSTO GARANTIDO	87
7.1	EXEMPLO NUMÉRICO	96
8	ESTIMAÇÃO DE ESTADOS E PARÂMETROS COM PERFORMANCE H_∞	101
8.1	RELAXAÇÃO NA CONVERGÊNCIA PARAMÉTRICA	113
8.2	EXEMPLO NUMÉRICO	114
9	CONCLUSÕES	123
9.1	TRABALHOS FUTUROS	123
9.2	PUBLICAÇÕES	124
	REFERÊNCIAS	125

1 INTRODUÇÃO

Utilizando uma citação de Ljung(1987), "deduzir modelos a partir de observações e estudar suas propriedades é o que diz respeito, na verdade, à ciência", enfatiza-se a importância das técnicas de obtenção de modelos para sistemas dinâmicos. O problema da estimação das variáveis de estado e de estimação de parâmetros em sistemas dinâmicos é uma questão importante tanto na teoria quanto na prática de controle de sistemas, em especial em aplicações nos quais se requer diagnóstico e monitoramento.

Existem, na literatura especializada, resultados relevantes para lidar com os problemas de estimação das variáveis de estado e de estimação de parâmetros de forma independente. Entretanto, em muitas situações se requer uma solução conjunta e os resultados clássicos para esses dois problemas de estimação não podem ser utilizados diretamente. Isso tem motivado pesquisadores de diferentes áreas a estudar esses problemas conjuntamente, resultando em diversas abordagens que já estão disponíveis na literatura atual.

O Filtro Estendido de Kalman (EKF) é provavelmente a abordagem mais utilizada para lidar com o problema de se estimar as variáveis de estados e os parâmetros de um sistema. Nessa abordagem, os parâmetros a serem estimados são vistos como variáveis de estados constantes, resultando em um sistema não linear e espaço de estados aumentado, onde as técnicas desenvolvidas originalmente para problemas de filtragem não lineares podem ser aplicadas diretamente. A simplicidade é o aspecto mais atraente desse método, entretanto existem fatores importantes que são considerados limitantes e devem ser avaliados, como por exemplo a convergência e o número de medidas necessárias para resolver esse problema aumentado. Vários trabalhos relatando aplicações dessa técnica podem ser encontrados, por exemplo, em (WENZEL et al., 2006) e (BAVDEKAR; DESHPANDE; PATWARDHAN, 2011).

Alternativamente, ao invés de se criar um espaço de estados aumentado para o sistema a ser estimado, algumas abordagens consistem em resolver em paralelo dois problemas convencionais de estimação, o problema de estimação de estados e o problema de estimação de parâmetro, e posteriormente conectá-los diretamente. Esse tipo de abordagem é descrita, por exemplo, em (BAVDEKAR et al., 2013) e em suas referências. Aspectos relacionados ao custo computacional e à precisão são fatores importantes a serem considerados nesses métodos. Em outra classe de métodos usam-se observadores adaptativos para lidar com o problema estimação conjunta. Para essas abordagens se pode citar (POSTOYAN et al., 2012) e (FARZA et al., 2009), onde são propostos observadores adaptativos para uma determinada classe de

sistemas não-lineares (SOUZA et al., 2014). Esses métodos conduzem, em geral, a estruturas complexas de estimadores e se baseiam frequentemente em uma transformação do sistema original em alguma forma canônica, na qual a presença dos parâmetros desconhecidos é simplificada (ZHANG, 2005). Existem poucas abordagens que não requerem uma forma canônica específica, veja por exemplo (TYUKIN et al., 2009).

Outra classe de métodos para lidar com o problema de estimação de forma conjunta se baseia em observadores usando modos deslizantes. Nessa classe, pode-se citar (YAN; SPURGEON; EDWARDS, 2013) que aborda ainda sistemas com atraso, (FRIDMAN; LEVANT; DAVILA, 2006), (RAO; BUSS; UTKIVN, 2009) para modos deslizantes de ordem elevada e (ZHOU; SOH; SHEN, 2013) utilizando um híbrido de modos deslizantes e observadores de ganho elevado. Existem ainda várias outras formas de se abordar o problema, como por exemplo utilizando observadores por intervalos. Para mais detalhes e referências no tema se sugere a leitura do survey (DOCHAIN, 2003).

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivos Gerais

O presente trabalho tem como objetivo fornecer uma alternativa aos métodos clássicos de estimação das variáveis de estado e de parâmetros utilizando a teoria sistemas chaveados. Além disso, pretende-se tratar esses dois problemas de forma conjunta. No contexto de controle, o chaveamento rápido pode acarretar algumas desvantagens decorrentes, como por exemplo o efeito conhecido como *chattering* que provoca desgaste excessivo dos dispositivos de comutação e provocam ruídos audíveis ou vibrações e que podem excitar dinâmicas em alta frequência que foram negligenciadas no modelo. No contexto da estimação, o *chattering* não é relevante, uma vez que a estimação é realizada por computadores ou circuitos dedicados a esse fim sem a necessidade de dispositivos de chaveamento envolvendo potência. Nesse caso a frequência de chaveamento é limitada diretamente pela frequência de amostragem dos sinais.

1.1.2 Objetivos Específicos

A fim de se obter um método de estimação das variáveis de estado e de parâmetros de forma conjunta, restringe-se o estudo à classe de sistemas di-

nômicos afins. Os sistemas chaveados estão no contexto da utilização de uma lei de chaveamento que seleciona, a cada instante de tempo, o modelo que melhor representa o sistema a ser estimado. A principal contribuição está na representação desse problema como um problema de projeto de observador de estados chaveado e de uma lei de chaveamento que estabiliza esse observador. Os parâmetros desconhecidos do sistema são tratados como parâmetros incertos que pertencem a um dado polítopo que especifica os limites desses parâmetros. A dinâmica do erro de estimação é então representada por um sistema chaveado no qual a teoria de Filippov (FILIPPOV, 1988) é utilizada para representar a dinâmica do erro de estimação através de uma inclusão diferencial, isto é, uma equação diferencial onde o campo vetorial é descontínuo em pontos isolados da trajetória e fenômenos decorrentes do chaveamento com altas frequências são modelados através de uma combinação convexa de um conjunto de campos vetoriais auxiliares.

As soluções obtidas são apresentadas na forma de Inequações Matriciais Lineares (LMIs), onde se obtém um conjunto de ganhos para o observador chaveado e um conjunto de coeficientes das funções que definem a lei de chaveamento. Quando o estado do sistema a ser observado possui modelo conhecido, isto é, não existem parâmetros a serem determinados, a solução proposta neste trabalho para o problema de estimação das variáveis de estado se reduz a um Observador de Luenberger clássico.

1.2 ESTIMAÇÃO DE ESTADOS

A estimação de estados possui ampla aplicação em controle de sistemas, uma vez que resultados importantes utilizam a realimentação de estados e na maioria dos sistemas físicos está disponível como saída apenas uma parcela desses estados. Além disso, estimação das variáveis de estados se faz necessária na detecção de falhas (PATTON; CHEN, 1993; FRANK; DING, 1997). Em muitos sistemas não é viável medir diretamente as variáveis de estados internos do sistema, seja pelo custo da instrumentação necessária para medição, seja porque há variáveis de estados que são abstratos, sem significância física. Em sistemas econômicos ou sociais de larga escala, por exemplo, essas medições demandam extensas pesquisas ou procedimentos de manutenção de registros complexos (LUENBERGER, 1979), justificando-se assim a importância da estimação de estados.

O objetivo dos observadores de estado é estimar os estados que não são diretamente medidos no sistema. Dessa forma, os observadores são, em geral, uma réplica matemática do sistema a ser observado, onde são utilizados os sinais medidos do sistema, tanto os de entrada quanto os de saída. O termo

Observador de Luenberger é utilizado para designar um observador linear e invariante no tempo (LTI) onde a dinâmica do erro de estimação é um sistema autônomo, isto é, a trajetória do erro só depende do erro inicial. O termo passou a ser utilizado após a tese de D. G. Luenberger em 1963, onde foram introduzidos os observadores de ordem reduzida (LUENBERGER, 1963). Esse tipo de observador é descrito na Seção 3.2.

Entretanto, há sistemas em que nem todos os estados são observáveis, em outras palavras, há sistemas onde existem estados que não produzem efeitos nas saídas medidas. O termo observabilidade foi introduzido por Rudolf E. Kalman no final da década de 50 (KALMAN, 1959) para quantificar o impacto desses estados na construção de um observador. A questão da observabilidade é abordada na Seção 3.1.

A diferença entre a saída do sistema e a saída do observador é chamada erro de estimação de estados, que é comumente utilizado como realimentação no observador. A escolha de como esse erro de estimação de estados é utilizado na realimentação proporciona características específicas nesses observadores. Dessa forma, um observador de estados pode ser interpretado como um filtro dinâmico onde, além de entradas conhecidas (medidas e sinal de controle), há entradas desconhecidas na forma de distúrbios. Além disso, o projeto de filtros leva em conta critérios de otimalidade que influenciam na atenuação ou amplificação de certas frequências das entradas desconhecidas. A filtragem é abordada na Seção 3.3.

Uma das aplicações dos observadores não lineares, além da observação de sistemas não lineares em si, é a possibilidade de se estimar conjuntamente variáveis de estado e parâmetros. Existe uma grande diversidade de observadores não lineares que são encontrados em livros clássicos de teoria de sistemas não lineares, por exemplo, (KAILATH, 1980) e (ISIDORI, 1995). Os observadores não lineares geralmente se baseiam em algum tipo de transformação de coordenadas, o que está intimamente associado com as funções que definem a dinâmica e a saída do sistema. Uma das primeiras abordagens (KRENER; ISIDORI, 1983), que também introduziu a técnica de *output injection*, utilizou-se dessa técnica para projetar observadores de estado de modo que o erro de observação seja equivalente à um sistema linear.

O termo observador robusto utilizado em (PETERSEN; MCFARLANE, 1991) se refere a um observador de estados que permite observar as variáveis de estado mesmo quando existem incertezas na definição do modelo. O termo observador robusto é, em geral, pouco utilizado, uma vez que em sistemas sujeitos a ruído, um observador também é utilizado para atenuar esse ruído presente no sistema, sendo assim comumente chamado de filtro robusto. Os primeiros resultados encontrados na literatura para resolver o problema de filtragem robusta baseiam-se na utilização de uma única função

de Lyapunov quadrática para todo o domínio das incertezas. Entretanto, esse tipo de abordagem pode ser conservadora e é possível reduzir esse conservadorismo utilizando-se funções de Lyapunov dependentes de parâmetros na etapa de projeto dos filtros robustos (GAO; LI, 2014). A proposta encontrada em (SOUZA; TROFINO, 2000) utiliza uma abordagem baseada em LMIs para a solução do problema de filtragem H_2 robusta. A filtragem robusta é abordada na Seção 3.4.

1.3 IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Modelos matemáticos são fundamentais para a grande maioria das ciências, em especial com propósito de previsões e controle. O tipo de modelo está intimamente ligado à aplicação do mesmo, bem como qual o grau de precisão necessária. Os modelos podem ser obtidos a partir da decomposição do sistema em suas equações básicas e utilizando-se das leis físicas e medição individual de cada constante do sistema. De forma alternativa, pode-se partir de uma equação geral e estimar seus parâmetros utilizando os sinais de entrada e saída do sistema.

A precisão com que se obtém o modelo é limitada diretamente pelos distúrbios e erros de medição do sistema. Dessa forma, os sinais de entrada e saída são coletados a partir do experimento de identificação de modo a maximizar as informações sobre as propriedades de interesse desse sistema. Além disso, o conjunto de modelos candidatos também é uma fonte de informação importante para a obtenção de um modelo adequado. Uma vez que não há regras gerais que definem o que é um modelo adequado, o conhecimento específico e até intuição, combinado com modelos matemáticos formais, são fundamentais para o sucesso da tarefa de modelagem e identificação. Os resultados a serem apresentados ao longo desta tese se referem à estimação de parâmetros, que no contexto de identificação de sistemas é uma das etapas da obtenção de um modelo matemático para algum problema de interesse.

Pode-se dividir a identificação de sistemas em métodos paramétricos e não paramétricos. Os métodos de identificação não paramétricos se caracterizam basicamente pela obtenção de modelos a partir de curvas ou funções parametrizadas por um vetor de dimensão finita. Dentre esses métodos citam-se análise da resposta transitória, análise de frequência, análise de correlação e análise espectral. Esses métodos são descritos de forma detalhada em (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1988).

Em geral, os métodos paramétricos podem ser caracterizados por um mapeamento entre os sinais disponíveis do sistema e o vetor de parâmetros a ser estimado, mantendo-se uma correspondência entre as grandezas físicas

ou funcionais do sistema e os parâmetros do modelo a ser estimado. Além da análise espectral que também pode ser usada como método paramétrico, o método dos mínimos quadrados é largamente utilizado para determinação dos parâmetros do sistema.

No Capítulo 4 dar-se-á ênfase aos métodos dos mínimos quadrados em sistemas contínuos, dado que esse é o método que mais se aproxima dos resultados a serem apresentados ao longo da tese. O método dos mínimos quadrados é, na grande maioria das vezes, utilizado em sistemas discretos. Consulte (LJUNG, 1987; SÖDERSTRÖM; STOICA, 1988; VERHAEGEN; VERDULT, 2007; COELHO; COELHO, 2004) ou (SINHA; RAO, 2012) para demais métodos e abordagens.

A utilização dos modos deslizantes (*sliding modes*) tanto para a observação robusta quanto para estimação de parâmetros de sistemas surgiu simultaneamente com o controle usando *sliding modes* nos trabalhos pioneiros em (EMEL'YANOV, 1967) e posteriormente em (UTKIN, 1981), o que deu origem à área de pesquisa chamada de controle de estrutura variável. A técnica chamada de modos deslizantes de ordem elevada (*higher order sliding mode*) para a estimação de estados é analisada em (FRIDMAN; LEVANT; DAVILA, 2007) e também utilizada em (DAVILA; BASIN; FRIDMAN, 2010) para estimação de parâmetros.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

Os dois próximos capítulos são dedicados a duas áreas às quais este trabalho se dedica, que são estimação de estados e estimação de parâmetros. O Capítulo 3 é dedicado a uma revisão sobre estimação de estados, com enfoque predominante aos sistemas lineares invariantes no tempo. Nesse capítulo apresentam-se a definição de observabilidade e os principais teoremas de observabilidade e detectabilidade. Aborda-se também os Observadores de Luenberger e o uso de observadores de estado para filtragem. Esse capítulo é concluído com observadores robustos e uma pequena revisão sobre observadores não lineares.

No Capítulo 4 se aborda o problema da identificação de sistemas, mais especificadamente, a estimação de parâmetros, uma vez que o problema de identificação de sistemas é um problema bastante amplo e foge do escopo desta tese. Dedicar-se a Seção 4.1 à excitação persistente fazendo-se um paralelo entre as definições para sinais discretos e contínuos. Esse capítulo é concluído com a Seção 4.2 dedicada ao método dos mínimos quadrados e à estimação de parâmetros utilizando *Sliding Modes* no Capítulo 5.

Como uma das contribuições desta tese, no Capítulo 5 apresenta-se

uma classe de observadores chaveados, que serão utilizados ao longo dos capítulos subsequentes da tese. No Capítulo 6 encontra-se a segunda contribuição para a estimação conjunta de estados e parâmetros usando observadores chaveados apresentados no Capítulo 5. Esse resultado é a base para os dois resultados subsequentes, apresentados nos Capítulos 7 e 8. No Capítulo 8 encontra-se a contribuição mais recente que contempla uma série de melhorias nos resultados anteriores.

2 DEFINIÇÕES E RESULTADOS AUXILIARES

As seções seguintes tratam das definições e resultados relevantes a serem usados ao longo da tese. Na seção 2.1, baseada em (GHAOUI; NICULESCU, 2000), (BOYD et al., 1997) e (APKARIAN; TUAN, 2000), mostra-se a forma de representar incertezas em sistemas dinâmicos conhecida como forma politópica. Como característica importante deste tipo representação cita-se o fato do conjunto resultante das incertezas ser convexo, isto é, tem-se pela propriedade de convexidade que se as condições de estabilidade, por exemplo, estão satisfeitas nos vértices então garante-se que essas condições também estão satisfeitas no interior desta região.

A seção 2.2 é baseada em (SENGER; TROFINO, 2014) e (SILVEIRA; TROFINO, 2015) e refere-se a sistemas chaveados, mais especificadamente suas definições e estabilidade. A estabilização de sistemas chaveados é comumente estudada no contexto de controle, entretanto, no presente trabalho, utiliza-se resultados similares para garantir a estabilização da dinâmica do erro de estimação de estados e parâmetros.

Outros dois resultados auxiliares, conhecidos como Lema de Finsler e Anuladores Lineares são mostrados na seção 2.3. Esses resultados são relevantes ao longo do trabalho para soluções baseadas em LMI.

2.1 SISTEMAS POLITÓPICOS

Um politopo é um subconjunto de \mathbb{R}^n , resultado da intersecção de um conjunto de semi-planos. No escopo desse trabalho, refere-se a politopos como um conjunto convexo formado pelo invólucro convexo (do inglês convex hull) de um número finito de pontos de um espaço euclidiano. Os politopos são aqui utilizados para delimitar um conjunto de parâmetros, tipicamente parâmetros do sistema para os quais não se conhece o valor preciso mas sim um intervalo onde eles se encontram. Os limites mínimos e máximos desses intervalos definem os vértices do politopo. Considere o Exemplo 1 abaixo onde a matrix $A(\delta)$ é parametrizada através do vetor de parâmetros δ .

Exemplo 1. Considere a seguinte matriz $A(\delta)$:

$$A(\delta) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} + \delta_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \delta_2 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

onde o vetor de parâmetros desconhecido $\delta = [\delta_1 \ \delta_2]^\top \in \mathbb{R}^2$ é limitado

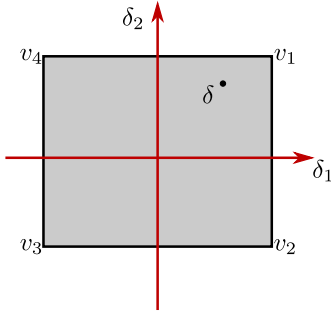


Figura 1 – Polítopo dos parâmetros

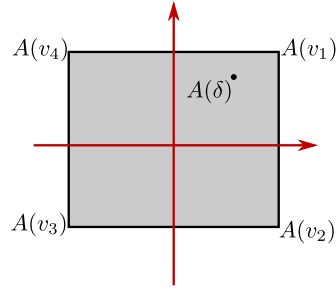


Figura 2 – Polítopo das matrizes

de forma que cada δ_i é restrito à faixa $\delta_i \in [\underline{\delta}_i; \overline{\delta}_i]$, onde os extremos da faixa são conhecidos. Esses extremos definem um polítopo Δ no espaço dos parâmetros como indica a Figura 1. Note que os vértices do polítopo Δ são simplesmente valores particulares do vetor δ obtidos com os extremos das faixas. Ou seja:

$$\Delta = \mathbf{Co}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \mathbf{Co}\left\{\begin{bmatrix} \overline{\delta}_1 \\ \overline{\delta}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{\delta}_1 \\ \underline{\delta}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{\delta}_1 \\ \underline{\delta}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{\delta}_1 \\ \overline{\delta}_2 \end{bmatrix}\right\} \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{Co}\{\cdot\}$ representa o invólucro convexo.

Com o polítopo (2.2) pode-se representar qualquer valor de δ , restrito à faixa acima, através de uma combinação convexa dos vértices, i.e. $\delta = \sum_{i=1}^4 \theta_i v_i$, onde θ_i é uma parametrização do parâmetro δ , visto como elemento do polítopo. Esse parâmetro, que recebe o nome de combinação convexa é um elemento do simplex unitário

$$\Theta_m = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^m : \theta_i \geq 0, \forall i, \sum_{i=1}^m \theta_i = 1 \right\} \quad (2.3)$$

onde m é a dimensão do simplex e corresponde ao número de vértices do polítopo, para o exemplo em questão tem-se $m = 4$.

Da mesma forma como é utilizado o polítopo Δ para representar os limites do parâmetro δ , pode-se usar uma representação politópica para delimitar possíveis valores dos elementos da matriz $A(\delta)$ a medida que δ se move no polítopo. Como $A(\delta)$ é afim em δ , toda representação de δ através de combinação convexa dos vértices se traduz na mesma combinação convexa das matrizes extremas $A(v_i)$, i.e. $A(\delta) = \sum_{i=1}^4 \theta_i A(v_i)$ para $\delta = \sum_{i=1}^4 \theta_i v_i$. Assim pode-se representar a matriz $A(\delta)$ através de um polítopo onde os

vértices são as matrizes extremas $A(v_i)$. Essa representação recebe o nome de representação politópica da matriz $A(\delta)$. Na Figura 2 mostra-se o espaço das matrizes $A(\delta)$ na representação a ser adotada ao longo desse documento. Na Figura 2 os eixos são meramente ilustrativos. Os extremos do espaço das matrizes definem um politopo M , como mostrado em (2.4).

$$M = \mathbf{Co}\{A(v_1), A(v_2), A(v_3), A(v_4)\} \quad (2.4)$$

2.2 SISTEMAS CHAVEADOS

O termo sistemas chaveados utilizado no contexto dessa tese refere-se a sistemas cuja estrutura muda ao longo do tempo em função de alguma ação exercida sobre ele, tal como abrir ou fechar relés ou tiristores, ou ainda o efeito de algumas não linearidades do tipo saturação. Cada vez que a estrutura muda, o modelo que descreve o sistema é diferente e o denominamos de subsistema ativo, isto é o subsistema que representa o sistema global num dado instante de tempo. Assim, um subsistema é um modo de operação particular do sistema global. A ação que define as mudanças é chamada de lei de chaveamento e o sistema global, com seus modos de operação e a lei de chaveamento, é denominado de sistema chaveado. Quando a mudança na estrutura é devido à abertura e fechamento de dispositivos do sistema que podem ser controlados, como relés e tiristores por exemplo, podemos projetar a lei de chaveamento desses dispositivos para atingir algum objetivo de performance para o sistema global. Essa lógica de chaveamento pode ser definida em função do tempo ou do estado. Como exemplo de lógica temporal podemos citar os trabalhos na área de PWM (*Pulse-Width Modulation* – Modulação por Largura de Pulso) e como função do estado, que nos interessa nesse trabalho, existe uma vasta literatura que pode ser consultada (SENGER; TROFINO, 2014), (DECARLO et al., 2000; LIN; ANTSAKLIS, 2009) e (TROFINO et al., 2011b). Relações entre a lógica de chaveamento baseada no estado, usada nesse trabalho, e a idéia de modelo médio (temporal), usada em modelos PWM é discutida no Comentário 6 da Seção 6. Nessa seção encontram-se resultados fundamentais para o entendimento dos capítulos subsequentes. Informações mais aprofundadas podem ser obtida em (FILIPPOV, 1988; DECARLO et al., 2000) e (SENGER; TROFINO, 2014), que são as principais referências usadas nessa seção.

Considere um sistema chaveado onde os modos de operação, a partir de agora denominados subsistemas, são descritos por modelos dinâmicos

afins como indicado abaixo.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_i x + b_i \quad i \in \mathbb{I}_m = \{1, 2, \dots, m\} \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{2.5}$$

As matrizes A_i e b_i são matrizes constantes de dimensão adequada representando a dinâmica de cada subsistema e a matriz C é a matriz que define o vetor de medidas. x é o vetor de variáveis de estado e y é o vetor de saída. Para simplificar a notação não indicamos a dependência temporal das variáveis $x(t), y(t)$.

Considerando uma lei de chaveamento em função do estado do sistema, seja $\sigma(x)$ uma função que define, a cada ponto da trajetória de estado $x(t)$ o subsistema ativo, isto é $\sigma(x) = i \in \mathbb{I}_m$ indica que no ponto $x(t) = x$ a dinâmica do sistema global é representada pelo i -ésimo subsistema (subsistema ativo).

Assim o sistema chaveado é representado pelo conjunto de subsistemas (2.5) e sua lei de chaveamento $\sigma(x)$.

Note que a lei de chaveamento indica que a dinâmica do sistema muda em função da região do espaço de estados onde se encontra a trajetória do sistema. Assim existem regiões do espaço de estado onde ocorrem mudanças na dinâmica do sistema, isto é, ocorrem trocas do subsistema ativo. Essas regiões são chamadas de regiões de chaveamento. Iremos assumir a partir de agora que a função $\sigma(x)$ está associada à uma partição do espaço de estados, isto é se $\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j$ são duas células dessa partição então $\sigma(x) = i$ para $x \in \mathcal{X}_i$, $\sigma(x) = j$ para $x \in \mathcal{X}_j$ e a região de chaveamento $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j$ é uma superfície, isto é pode ser expressa por uma função $\zeta(x) = 0$ com gradiente de $\zeta(x) \neq 0$. Com isso a trajetória de estado sofrerá uma descontinuidade na sua velocidade ao atravessar a superfície, mas essa descontinuidade será restrita a um ponto isolado da trajetória o que não representa problemas para caracterização da trajetória. Essa situação está ilustrada na Figura 3 onde \mathcal{X}_j é representado por $\zeta(x) < 0$ e \mathcal{X}_i é representado por $\zeta(x) > 0$.

No entanto, como a frequência de chaveamento é livre, ao permitir que ela se torne muito grande podemos criar fenômenos que não existem em baixas frequências. Por exemplo, ao cruzarmos uma placa vermelha contra uma placa verde em baixa frequência podemos distinguir as duas placas se movendo e podemos perceber claramente as cores dessas placas. No entanto, quando aumentamos a frequência as duas placas deixam de ser percebidas e uma terceira placa amarela passa a existir. Em sistemas chaveados o fenômeno que pode ser criado com altas frequências de chaveamento recebe o nome de modos deslizantes (*sliding modes*). A idéia é que em certas partes de uma superfície de chaveamento pode acontecer uma confluência dos cam-

pos vetoriais dos subsistemas adjacentes que forçam a trajetória a ficar sobre a superfície ao invés de atravessá-la. Essa situação está ilustrada na Figura 4 onde \mathcal{X}_j é representado por $\zeta(x) < 0$ e \mathcal{X}_i é representado por $\zeta(x) > 0$. Veja que agora ao mudar de uma região para outra a trajetória sempre é mandada de volta para a superfície e isso ocorre com frequência ilimitada devido ao fato de que as trocas ocorrem em tempo infinitesimal. Essa dinâmica de deslizar sobre a superfície não pode ser explicada por nenhum dos subsistemas isoladamente. Esse fenômeno, chamado de modos deslizantes, foi matematicamente equacionado por Filippov em (FILIPPOV, 1988) onde esse deslizamento sobre a superfície foi representado por um sistema onde o campo vetorial é sempre tangente à superfície. Esse campo vetorial tangente pode ser explicado como o resultado da interação entre os subsistemas que resulta na combinação convexa dos campos desses subsistemas adjacentes à superfície. Assim, enquanto o sistema deslizar pela superfície o seu modelo de comportamento pode ser representado por uma inclusão diferencial $\dot{x} \in F(x)$, onde $F(x)$ é o invólucro convexo (*convex hull*) formado pelos campos vetoriais adjacentes à superfície no ponto x . Note que a dinâmica de deslizamento não corresponde a qualquer elemento do invólucro convexo, mas sim a um elemento do invólucro que está no plano tangente da superfície. Na Figura 4 esse campo está indicado em vermelho por $f_\theta(x) = \theta(x)f_i(x) + (1 - \theta(x))f_j(x)$, sendo $\theta(x)$ o elemento que define a combinação convexa no ponto x . De acordo com Filippov, a trajetória do sistema em modo deslizante assim representado, pode ser definida como uma função absolutamente contínua que satisfaz $\dot{x} \in F(x)$ em quase todo instante de tempo, isto é, exceto em instantes isolados de tempo onde podem ocorrer descontinuidade da velocidade da trajetória (\dot{x}), por exemplo ao sair ou entrar na superfície, ou ainda durante o próprio deslizamento dado que a combinação convexa sobre o plano tangente pode não ser única e qualquer uma poderia representar o campo vetorial do sistema (velocidade da trajetória).

Para incluir a dinâmica de modos deslizantes num sistema chaveado composto pelos subsistemas (2.5) e uma lei de chaveamento $\sigma(x)$, basta representá-lo na forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_\theta x + b_\theta \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{2.6}$$

onde $A_\theta = \sum_{i \in \sigma(x)} \theta_i A_i$ e $b_\theta = \sum_{i \in \sigma(x)} \theta_i b_i$, onde $\theta \in \Theta_m$ sendo Θ_m o simplex unitário já definido em (2.3) da Seção 2.1. Note que se $\sigma(x) = i$ o sistema acima se torna idêntico ao i -ésimo subsistema em (2.5), dado que $\sigma(x) = i$ implica $\theta_i(x) = 1$, e portanto $\theta_j(x) = 0$, $\forall j \neq i$. Quando o sistema entra em modos deslizantes $\sigma(x)$ se torna um conjunto de índices que indica quais

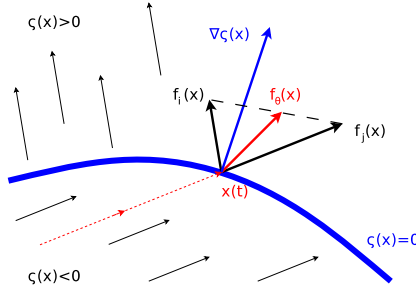


Figura 3 – Solução de (2.5) atravessa $\zeta = 0$

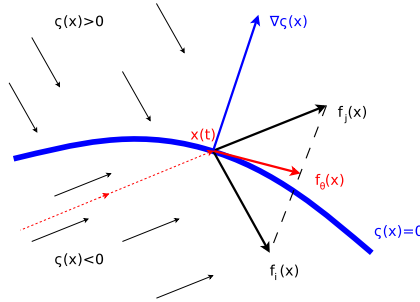


Figura 4 – Solução de (2.5) permanece em $\zeta = 0$

subsistemas fazem parte dessa dinâmica, isto é, quais subsistemas fazem parte da combinação convexa que define o campo vetorial sobre plano tangente.

É importante notar que a lei de chaveamento deve ser obtida em tempo real e portanto, ao representarmos essa lei por $\sigma(x)$ estamos admitindo que temos o estado em tempo real. Neste trabalho o estado é conhecido apenas parcialmente e será estimado. Assim a lei de chaveamento deve ser construída em função dos sinais disponíveis em tempo real.

2.3 RESULTADOS AUXILIARES

Ao longo das próximas seções se fará extenso uso de dois resultados que são conhecidos como anuladores lineares e Lema de Finsler. Mais informações sobre esses resultados podem ser obtidos em (TROFINO; DEZUO, 2014) e (BOYD et al., 1997).

2.3.1 Anuladores Lineares

Define-se um anulador para o vetor $z = [z_1 \ \dots \ z_q]^\top \in \mathbb{R}^q$ como uma função matricial $\mathfrak{K}(z)$ tal que $\mathfrak{K}(z)z = 0$ para todo z de interesse.

Se $\mathfrak{K}(z)$ é linear, esse é chamado de anulador linear e pode ser representado por $\mathfrak{K}(z) \in \mathbb{R}^{r \times q}$ onde $r = \sum_{j=1}^{q-1} j$ e $\mathfrak{K}(z)$ é dado através da seguinte fórmula (TROFINO; DEZUO, 2014):

$$\mathfrak{K}(z) = \begin{bmatrix} \phi_1 & Y_1 \\ \vdots & \vdots \\ \phi_{(q-1)} & Y_{(q-1)} \end{bmatrix}, \phi_i = \begin{bmatrix} z_{(i+1)} \\ E_i \\ \vdots \\ z_q \end{bmatrix}, i \geq 2. \quad (2.7)$$

$$Y_i = -z_i I_{(q-i)}, i \geq 1, \phi_1 = [z_2 \ \dots \ z_q]^\top, E_i = 0_{(q-i) \times (i-1)}$$

2.3.2 Lema de Finsler

O lema a seguir, conhecido como Lema de Finsler, escrito aqui sem a devida prova, que pode ser obtida em (BOYD et al., 1997)

Lema 1 (Lema de Finsler). *Seja $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^s$ um dado conjunto politópico, seja $M(\cdot) : \mathcal{W} \mapsto \mathbb{R}^{q \times q}$, $G(\cdot) : \mathcal{W} \mapsto \mathbb{R}^{r \times q}$ uma função matricial dada, onde $M(\cdot)$ é simétrica. Seja $Q(w)$ a base para o espaço nulo de $G(w)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\forall w \in \mathcal{W}$, a condição $z^\top M(w)z > 0$ é satisfeita $\forall z \in \mathbb{R}^q : G(w)z = 0$.
2. $\forall w \in \mathcal{W}$, existe uma função matricial $L(\cdot) : \mathcal{W} \mapsto \mathbb{R}^{q \times r}$ tal que $M(w) + L(w)G(w) + G'(w)L'(w) > 0$.
3. $\forall w \in \mathcal{W}$, a condição $Q'(w)M(w)Q(w) > 0$ é satisfeita.
4. $\forall w \in \mathcal{W}$, existe um escalar positivo $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que a condição $M(w) + \alpha G'(w)G(w) > 0$ é satisfeita.

3 ESTIMAÇÃO DE VARIÁVEIS DE ESTADOS

Nesse capítulo pretende-se contextualizar a estimação das variáveis de estado bem como introduzir alguns conceitos e terminologias a serem utilizados ao longo da tese. Para as seguintes seções, usar-se-á constantemente a definição de sistema dinâmico linear invariante no tempo (LTI) na forma de espaço de estados mostrada em (3.1).

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t),\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados do sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ o vetor de entrada e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ o vetor de saída. A, B, C e D são matrizes constantes de dimensão apropriada. A condição inicial do sistema (3.1) é definida para $t = 0$ como $x(0) = x_0$.

Resolvendo a equação diferencial (3.1) com a condição inicial $x(0) = x_0$ obtém-se como resultado:

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t),\tag{3.2}$$

que é a equação da saída $y(t)$ do sistema (3.1) para a condição inicial x_0 , considerando uma entrada conhecida $u(t)$ ao longo do tempo $t \geq 0$.

3.1 OBSERVABILIDADE

Os teoremas e provas dessa seção são baseados em (CHEN, 1995), adaptando-as de modo a evitar o uso dos teoremas de controlabilidade e a dualidade entre controlabilidade e observabilidade. Para sistemas dinâmicos, como exemplificado pelo sistema linear invariante no tempo (3.1), define-se a observabilidade como:

Definição 1. (*Observabilidade*): Um sistema é dito observável se todo estado inicial $x(0)$ pode ser determinado unicamente a partir do conhecimento da saída $y(t)$ e da entrada $u(t)$ durante um intervalo de tempo finito $0 \leq t \leq t_1$.

Dentre as diversas formas de se verificar a observabilidade de sistemas, inclui-se aqui uma das formas mais usuais e a sere utilizada ao longo dos próximos capítulos.

Teorema 1. (*Observabilidade*): As seguintes afirmações são equivalentes:

1. o sistema (3.1) é observável;
2. a matriz $\mathcal{W}_o(t)$ é não singular para $t > 0$;

$$\mathcal{W}_o(t) = \int_0^t e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} d\tau. \quad (3.3)$$

3. a matriz \mathcal{O} de dimensão $nn_y \times n$ possui posto completo, i.e. $\text{rank}(\mathcal{O}) = n$.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

4. se todos os autovalores de A possuem a parte real negativa, a solução \mathcal{W}_o de (3.5) é positiva definida.

$$A' \mathcal{W}_o + \mathcal{W}_o A = -C' C. \quad (3.5)$$

Além disso, \mathcal{W}_o , que é chamado de Gramiano de Observabilidade, pode ser obtido como:

$$\mathcal{W}_o = \int_0^\infty e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} d\tau. \quad (3.6)$$

Prova: A prova deste teorema pode ser encontrada em (CHEN, 1995, p. 156), mas para tornar o trabalho mais autocontido ela é apresentada a seguir.

$2 \Rightarrow 1$. Multiplicando-se a direita de (3.3) por $x(0)$ verifica-se que:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_o(t)x(0) &= \left(\int_0^t e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} d\tau \right) x(0), \\ x(0) &= \mathcal{W}_o^{-1}(t) \int_0^t e^{A'\tau} C' \tilde{y}(t) d\tau, \end{aligned}$$

onde $\tilde{y}(t)$ é obtido de (3.2) como mostrado abaixo:

$$\tilde{y}(t) = y(t) - C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau - D u(t).$$

$1 \Rightarrow 2$. A prova de 1 para 2 é feita provando que se $\mathcal{W}_o(t)$ é singular, o sistema não é observável. Multiplicando-se a direita por um vetor v não nulo

e a esquerda por seu transposto, verifica-se que

$$\begin{aligned} v' \mathcal{W}_o(t) v &= \int_0^t v' e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} v d\tau, \\ &= \int_0^t \|C e^{A\tau} v\|^2 d\tau = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

que implica em

$$C e^{At} v = \mathbf{0}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.8)$$

Assim, para $u = \mathbf{0}$, podem-se escolher duas condições iniciais distintas, $x_1(0) = v \neq \mathbf{0}$ e $x_2(0) = \mathbf{0}$ que satisfazem

$$y(t) = C e^{At} x_1(0) = \mathbf{0} \quad e \quad y(t) = C e^{At} x_2(0) = \mathbf{0},$$

opondo-se a Definição 1.

$2 \Rightarrow 3$. Se $\mathcal{W}_o(t)$ é não singular, usando os mesmos argumentos de (3.7), não existe vetor não nulo v , tal que $C e^{A\tau} v = \mathbf{0}$, $\forall \tau \geq 0$. Usando o Teorema de Cayley-Hamilton (CHEN, 1995), $C e^{A\tau}$ pode ser representado pela combinação linear de $\{C, CA, \dots, CA^{n-1}\}$, ou seja, não existe vetor não nulo v tal que

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} v = \mathcal{O}v = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

$3 \Rightarrow 2$. Suponha que \mathcal{O} possui posto completo e $\mathcal{W}_o(t)$ é singular. Fazendo $t = 0$ em (3.8), obtém-se $Cv = 0$. Derivando-se sucessivamente (3.8) para $t = 0$, obtém-se $CA^k v = 0$, para $k = 1, 2, \dots$. Essa condição pode ser representada como $\exists v \neq 0$, $\mathcal{O}v = 0$, que contradiz a suposição de \mathcal{O} possuir posto completo.

$2 \Rightarrow 4$. O Gramiano de Observabilidade \mathcal{W}_o é sempre positivo semi-definido, como $\mathcal{W}_o(t)$ é não singular para todo t , \mathcal{W}_o é positivo definido.

Substituindo (3.6) em (3.5) obtém-se

$$\begin{aligned} A' \mathcal{W}_o + \mathcal{W}_o A &= \int_0^\infty A' e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} d\tau + \int_0^\infty e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} A d\tau, \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{d\tau} \left(e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} \right) d\tau, \\ &= e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} \Big|_{\tau=0}^\infty = 0 - C' C. \end{aligned}$$

4 \Rightarrow 2. Seja λ um autovalor de A e v seu respectivo autovetor. Multiplicando (3.5) à direita v e à esquerda por seu conjugado transposto:

$$\begin{aligned} v^* A' \mathcal{W}_o v + v^* \mathcal{W}_o A v &= -v^* C' C v, \\ (\lambda^* + \lambda) v^* \mathcal{W}_o v &= -v^* C' C v, \end{aligned}$$

como \mathcal{W}_o é positiva definida, implica que $(\lambda^* + \lambda)$ é negativo. \square

O Teorema 1 permite concluir também que, para sistemas lineares invariantes no tempo, a observabilidade é uma característica intrínseca do sistema e não depende de sua condição inicial $x(0)$ ou sinais conhecidos $u(t)$ e $y(t)$, bem como das matrizes B e D .

Em muitas situações não se faz necessário que todos as variáveis de estado de um sistema sejam observáveis, desde que essas variáveis não sejam instáveis, ou seja, é suficiente saber que as variáveis de estado não observáveis convergem para o seu equilíbrio em algum instante futuro. Muitos resultados nesse sentido utilizam uma transformação de similaridade para separar o sistema em sua parte observável e não observável. Essa transformação é conhecida na literatura como Decomposição de Kalman, mais detalhes em (CHEN, 1995). Os sistemas em que os estados não observáveis são estáveis são chamados de detectáveis, como na Definição 2.

Definição 2. (*Detectabilidade*): Um sistema é dito detectável se todos os estados não observáveis, se existirem, forem estáveis.

A verificação da detectabilidade pode ser realizada de forma bastante eficiente com LMIs, como mostrado pelo Teorema 2.

Teorema 2. (*Detectabilidade*) (BOYD et al., 1997): O sistema (3.1) é detectável se, e somente se existem matrizes $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiva definida e $S \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ tais que a seguinte LMI seja factível.

$$A'P + PA + C'S' + SC < 0 \quad , \quad P > 0. \quad (3.9)$$

Prova: *Necessidade.* Utilizando a definição 2, se o sistema é detectável, todos os estados não observáveis de (3.1) são estáveis. Assim, é possível encontrar uma função candidata a Lyapunov $v(x(t)) = x(t)'Px(t)$ positiva definida com sua derivada negativa definida para todos $x(t)$ que pertencem ao núcleo de C , ou seja $Cx(t) = 0$. Essa última afirmação indica que os estados não observáveis são todos $x_0 \neq 0$ tais que $Ce^{At}x_0 = 0$, para todo t . A derivada de $v(x(t))$ é dada por:

$$\dot{v}(x(t)) = \dot{x}(t)'Px(t) + x(t)'P\dot{x}(t) = x'(t)(A'P + PA)x(t) < 0,$$

Utilizando o Lema 1 (Lema de Finsler), a condição de negatividade de $\dot{v}(x(t))$ é equivalente a LMI (3.9) com $Cx(t) = 0$.

Suficiência. A suficiência pode ser provada verificando-se que o Lema 1 oferece uma condição necessária e suficiente para a LMI (3.9) e o Teorema de Lyapunov é uma condição necessária e suficiente para sistemas lineares invariantes no tempo. \square

3.2 OBSERVADORES DE LUENBERGER

Seja um sistema linear invariante no tempo (3.1), onde deseja-se reconstruir o vetor de estados $x(t)$ utilizando apenas os sinais mensuráveis $u(t)$ e $y(t)$ além das matrizes A , B , C e D que definem o sistema. A forma mais simples de um observador é uma cópia do sistema (3.1) com um novo vetor de estados $\hat{x}(t)$, chamado de estado do observador. Esse observador é chamado de Observador Trivial, como apresentado em (LUENBERGER, 1979).

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t). \quad (3.10)$$

O erro de estimação de estado $e(t)$ é definido como:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (3.11)$$

e a derivada desse erro de estimação é

$$\dot{e}(t) = Ax(t) + Bu(t) - (A\hat{x}(t) + Bu(t)) = Ae(t). \quad (3.12)$$

Note que se a matriz A é estável, o erro de estimação $e(t)$ tende a zero. Isso é verdade, entretanto, se a matriz A que define a dinâmica do sistema é conhecida, uma vez que essa é utilizada no Observador. Nas situações onde A não é estável, mas o par (A, C) é observável, a solução do problema de estimação de estados é obtida utilizando um sinal de realimentação para forçar a convergência do estado $\hat{x}(t)$ para $x(t)$. A utilização de realimentação no Observador Trivial (3.10) permite ainda ajustar a velocidade de convergência. Seja o observador definido a seguir.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)); \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Essa configuração de um sistema formado por uma cópia do sistema original (3.1) com realimentação do erro de saída $y(t) - \hat{y}(t)$ através de um ganho L é comumente chamado de *Observador de Luenberger*. O diagrama

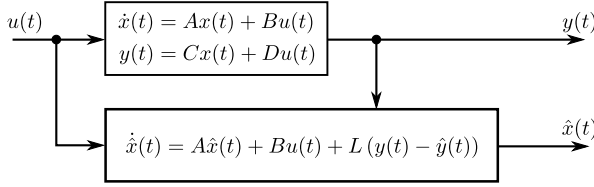


Figura 5 – Sistema LTI com Observador de Luenberger

esquemático de um sistema LTI com um Observador de Luenberger encontra-se na Fig. 5. Para o observador (3.13) a derivada do erro de estimação de estados é:

$$\dot{e}(t) = Ax(t) + Bu(t) - (A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t))) = (A - LC)e(t). \quad (3.14)$$

Veja que a convergência de $e(t)$ para zero em (3.14) depende de $(A - LC)$ e não apenas de A .

O projeto de um Observador de Luenberger é basicamente o projeto do ganho L do observador. Quando as matrizes do sistema A , B , C e D não possuem incertezas, pode-se utilizar uma variação da fórmula de Sylvester, obtendo-se assim, uma forma analítica para a alocação de polos em sistemas multivariáveis (BHATTACHARYYA; SOUZA, 1982). Em (3.15), as matrizes A e C são as matrizes do sistema e G é uma matriz não nula de decisão que estabelece como cada autovalor de (3.1) será alterado. A matriz H é uma matriz, geralmente diagonal, que define os autovalores desejados.

$$XA - HX = GC. \quad (3.15)$$

Utilizando a solução X obtém-se o ganho do observador $L = X^{-1}G$.

O projeto do ganho L do observador pode ser realizado eficientemente usando LMIs, permitindo incluir também demais critérios para ajustar o tipo de resposta do observador, como velocidade de convergência ou rejeição de ruído, que serão descritos na Seção 3.3 e nos capítulos 7 e 8. Uma forma simples para encontrar um ganho L do observador usando LMI é descrita pelo Teorema 3.

Teorema 3. *Seja a seguinte LMI.*

$$A'P + PA - SC - C'S < 0 \quad P > 0; \quad (3.16)$$

onde $P = P'$ e S são variáveis de decisão. A solução $L = P^{-1}S$ estabiliza o

sistema (3.14), garantindo que $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) = x(t)$.

Prova: A prova baseia-se em uma função candidata a Lyapunov $v(e(t)) = e(t)'Pe(t)$ positiva definida, cuja derivada é

$$\begin{aligned}\dot{v}(e(t)) &= \dot{e}(t)'Pe(t) + e(t)'P\dot{e}(t), \\ &= e(t)'(A'P - C'L'P + PA - PLC)e(t) < 0, \\ &= e(t)'(A'P + PA - SC - C'S')e(t) < 0,\end{aligned}$$

onde $S = PL$ é uma substituição de variável.

□

Comentário 1. A partir de (3.16) e (3.9) conclui-se que existe L que estabiliza (3.1) se (C, A) é detectável.

Existem muitas outras formas mais elaboradas de projeto do ganho L do observador, por exemplo na Seção 3.3.

3.3 FILTRAGEM

Além da estimação de estados em sistemas como descritos em (3.1), observadores podem também atenuar entradas indesejadas, as quais não são medidas. Essas entradas indesejadas são geralmente distúrbios de medida ou distúrbios no sistema. Inicialmente é apresentada uma breve introdução sobre variáveis estocásticas que serão utilizadas nas próximas seções.

3.3.1 Filtro \mathcal{H}_2

As principais referências utilizadas nessa seção são (BOYD et al., 1997; HINDI, 2006; COUTINHO et al., 2003). O termo \mathcal{H}_2 é usado em controle para representar o espaço de Hardy das funções de transferência estritamente próprias e limitadas pela norma-2, isto é, o conjunto das funções $h(t)$ estáveis tais que

$$\begin{aligned}\|h(t)\|_2^2 &= \int_0^\infty h'(t)h(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \text{tr}(H^*(j\omega)H(j\omega))d\omega, \\ h(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}\end{aligned}\tag{3.17}$$

seja limitada. A relação à direita de (3.17) é obtida utilizando-se o Teorema de Parseval e \mathbf{tr} representa o traço de uma matriz.

Seja um sistema linear invariante no tempo sujeito a ruído.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + D_w w(t), \\ z(t) &= C_z x(t),\end{aligned}\tag{3.18}$$

onde $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ é um ruído branco de média nula, $\mathbf{E}\{w(t)\} = \mathbf{0}$ e correlação igual a identidade, i.e. $\mathbf{E}\{w(t)w'(t+\tau)\} = I\delta(\tau)$. B_w e D_w são matrizes de dimensão adequada e $z(t)$ uma saída de performance ponderada pela matriz C_z . A condição inicial do sistema (3.18) é definida para $t = 0$ como $x(0) = x_0$.

Considere o problema de minimizar a variância do erro de estimação da variável de performance $e_z(t) = z(t) - \hat{z}(t)$, onde $\hat{z}(t) = C_z \hat{x}(t)$ e $\hat{x}(t)$ é o estado do Observador de Luenberger definido em (3.13). O problema em questão pode ser definido como a minimização do seguinte funcional

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}\{e_z'(t)e_z(t)\}.\tag{3.19}$$

A seguir, utilizando a definição do sistema (3.18) e a definição do observador de Luenberger em (3.14) calcula-se a dinâmica do erro $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)e(t) + (B_w - LD_w)w(t), \\ e_z(t) &= C_z e(t).\end{aligned}\tag{3.20}$$

Teorema 4. *Seja (3.20), onde o par (A, C_z) é detectável. Se existem matrizes P , N e Q tais que:*

$$\begin{aligned}\min_{N, P, Q} \mathbf{tr}(N), \\ \begin{bmatrix} N & B_w'P - D_w'Q' \\ \star & P \end{bmatrix} > 0 \quad , \quad A'P + PA - C'S' - SC + C_z'C_z < 0,\end{aligned}\tag{3.21}$$

onde $Q = PL$, o sistema é exponencialmente estável e $\mathbf{tr}(N)$ é um limitante superior para (3.19).

Prova: Para condições iniciais nulas, a resposta temporal $e_z(t)$ é obtida como segue:

$$e_z(t) = \int_0^t \Phi(t, \tau) w(\tau) d\tau,$$

onde $\Phi(t, \tau) = C_z e^{(A-LC)(t-\tau)} (B_w - LD_w)$.

Pode-se escrever (3.19) como

$$\begin{aligned} J &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{tr} \left(e_z'(t) e_z(t) \right) \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{tr} \left(e_z(t) e_z'(t) \right) \right\}, \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left\{ \mathbf{tr} \left(\int_0^t \Phi(t, \tau) w(\tau) d\tau \int_0^t w'(\sigma) \Phi'(t, \sigma) d\sigma \right) \right\}, \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{tr} \left(\int_0^t \Phi(t, \tau) \int_0^t \mathbf{E} \left\{ w(\tau) w'(\sigma) \right\} \Phi'(t, \sigma) d\sigma d\tau \right), \\ &= \mathbf{tr} \left(\int_0^\infty \Phi(t, \tau) \Phi'(t, \tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Fazendo $\mu = t - \tau$ e substituindo $\Phi(t, \tau)$ na relação acima, obtém-se:

$$\begin{aligned} J &= \mathbf{tr} \left(\int_0^\infty C_z e^{(A-LC)\mu} (B_w - LD_w) (B_w - LD_w)' e^{(A-LC)'\mu} C_z' d\mu \right), \\ &= \mathbf{tr} \left((B_w - LD_w) \int_0^\infty e^{(A-LC)'\mu} C_z' C_z e^{(A-LC)\mu} d\mu (B_w - LD_w) \right), \quad (3.22) \\ &= \mathbf{tr} \left((B_w - LD_w) \mathcal{W}_o (B_w - LD_w) \right), \end{aligned}$$

onde \mathcal{W}_o é a solução de (3.23), de acordo com (3.5)

$$(A - LC)' \mathcal{W}_o + \mathcal{W}_o (A - LC) + C_z' C_z = 0. \quad (3.23)$$

A relação de igualdade (3.23), juntamente com a mudança de variável $S = PL$ é substituída pela segunda inequação de (3.21), uma vez que $(A - LC)' P + P(A - LC) + C_z' C_z + \varepsilon^2 I = 0$ possui solução única tal que $P \geq \mathcal{W}_0$.

A inequação (3.24) implica que $\mathbf{tr}(N)$ é um limitante superior para J em (3.22), em que $P \geq \mathcal{W}_o$,

$$N > (B_w - LD_w)' P (B_w - LD_w). \quad (3.24)$$

Utilizando o Complemento de Schur na inequação (3.24), com $P > 0$ e utilizando a mudança de variável $S = PL$ obtém-se a primeira inequação de (3.21). \square

3.3.2 Filtro \mathcal{H}_∞

As principais referências utilizadas nessa seção são (BOYD et al., 1997; HINDI, 2006; COUTINHO et al., 2009). O termo \mathcal{H}_∞ é usado em controle para representar o espaço de Hardy das funções de transferência estritamente próprias, entretanto a norma \mathcal{H}_∞ , diferentemente da norma-2, em sistema SISO, é a amplitude máxima da resposta em todo espectro de frequência. Em sistemas MIMO, a norma \mathcal{H}_∞ é o máximo valor singular da matriz de transferência, ou, em outras palavras, é o ganho máximo do sistema em todas as direções de entrada e em todas as frequências. A principal vantagem do filtro \mathcal{H}_∞ é que o distúrbio de entrada não precisa ser ruído branco, basta ser limitado.

Considere o sistema (3.18), o observador (3.13) e a consequente dinâmica do erro de estimação de estados em (3.20). O objetivo é projetar o ganho do observador L de modo a minimizar o seguinte funcional.

$$J = \sup_{w(t) \neq 0} \frac{\|e_z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2}. \quad (3.25)$$

A solução para o problema em questão como solução de uma LMI é mostrada no Teorema 5.

Teorema 5. *Seja (3.20), onde o par (A, C_z) é detectável. Se existem matrizes P e Q tais que:*

$$\min_{N, P, Q} \gamma, \quad \begin{bmatrix} PA + A'P - QC - C'Q' & PB_w - QD_w & C'_z \\ \star & -\gamma I & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad P > 0, \quad (3.26)$$

onde $Q = PL$, o sistema é exponencialmente estável e γ é um limitante superior para (3.25).

Prova: Utilizando o complemento de Schur, a primeira inequação de (3.26) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} PA + A'P - QC - C'Q' + \frac{1}{\gamma} C'_z C_z & PB_w - QD_w \\ \star & -\gamma \end{bmatrix} < 0. \quad (3.27)$$

A inequação 3.27 é equivalente a

$$\begin{aligned}
e'(t) (PA + A'P - QC - C'Q') e(t) + 2e'(t) (PB_w - QD_w) w(t) + \\
+ \frac{1}{\gamma} e'(t) C'_z C_z e(t) - \gamma w'(t) w(t) < 0.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Realizando as substituições adequadas, a inequação (3.28) é equivalente a

$$\gamma \frac{d}{dt} V(e(t)) + e'_z(t) e_z(t) - \gamma^2 w'(t) w(t) < 0. \tag{3.29}$$

Integrando a relação (3.29), obtém-se

$$\gamma \int_0^\infty \frac{d}{dt} V(e(t)) dt + \int_0^\infty e'_z(t) e_z(t) dt - \gamma^2 \int_0^\infty w'(t) w(t) dt < 0. \tag{3.30}$$

A condição $PA + A'P - QC - C'Q' < 0$ é necessária na primeira inequação de (3.26), logo se existem matrizes $P > 0$ e Q , o sistema (3.20) é estável com $L = P^{-1}Q$ e $V(e(t)) = e'(t)Pe(t)$ é uma função de Lyapunov. Dessa forma, para condições iniciais nulas e $\gamma > 0$, (3.30) é uma condição necessária para (3.31), uma vez que $V(e(0)) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} V(e(t)) = 0$.

$$\int_0^\infty e'_z(t) e_z(t) dt - \gamma^2 \int_0^\infty w'(t) w(t) dt < 0. \tag{3.31}$$

A inequação (3.31), descrita acima, indica que γ é um limitante superior para J , uma vez que (3.31) pode ser facilmente escrito como (3.25) elevado ao quadrado, como mostrado abaixo.

$$\gamma^2 > \frac{\|e_z(t)\|_2^2}{\|w(t)\|_2^2}.$$

□

3.4 OBSERVADOR ROBUSTO

Para a presente seção será utilizado o sistema (3.32) definido para uma condição inicial $x(0) = x_0$:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t), \\
y(t) &= Cx(t) + Dw(t), \\
z(t) &= Lx(t),
\end{aligned} \tag{3.32}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ são as variáveis de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ e o vetor de saída e $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ um ruído branco de média nula, $\mathbf{E}\{w(t)\} = \mathbf{0}$ e correlação igual a identidade $\mathbf{E}\{w(t)w'(t+\tau)\} = I\delta(\tau)$. A matriz L é conhecida e $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ a saída a ser estimada. As matrizes A , B , C e D são matrizes constantes desconhecidas, pertencentes a um dado politopo \mathcal{D} , definido a seguir:

$$\mathcal{D} := \left\{ S : S = \sum_{i=1}^m \lambda_i S_i; \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}, \quad (3.33)$$

onde

$$S := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S_i := \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Ao definir o sinal de ruído como $w^T(t) = [w_1^T(t) \ w_2^T(t)]$, as parcelas $Bw(t)$ e $Dw(t)$ de (3.32) são equivalente a $\tilde{B}w_1(t)$ e $\tilde{D}w_2(t)$ respectivamente, onde $B = [\tilde{B} \ \mathbf{0}]$ e $D = [\mathbf{0} \ \tilde{D}]$, uma vez que $w(t)$ é um sinal vetorial não correlacionado. Ou seja, (3.32) é uma generalização da restrição $DB^T = \mathbf{0}$, situação onde o sinal $Bw(t)$ é transferido para a saída $y(t)$ somente através de $x(t)$.

A proposta de (SOUZA; TROFINO, 2000) utiliza o observador (3.35) e uma abordagem baseada em LMIs para a solução do problema de filtragem \mathbf{H}_2 robusta:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_f \hat{x}(t) + K_f y(t), \\ \hat{z}(t) &= L_f \hat{x}(t), \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde as matrizes $A_f \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$, $K_f \in \mathbb{R}^{n_f \times n_y}$ e $L_f \in \mathbb{R}^{n_z \times n_f}$ são matrizes a determinar. Seja o seguinte sistema linear

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_a \xi(t) + B_a w(t), \\ e(t) &= C_a \xi(t), \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde $\xi^T = [x^T \ \hat{x}^T]$ e

$$A_a = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ K_f C & A_f \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ K_f D \end{bmatrix}, \quad C_a = [L \quad -L_f]. \quad (3.37)$$

Note que $e(t) = x(t) - \hat{x}^T(t)$ é o erro de estimação de estados.

Utilizando o resultado já bastante conhecido na literatura (SOUZA; TROFINO, 2000) e já explorado na prova do Teorema 4, sabe-se que a variância do erro de estimação para $t \rightarrow \infty$ é dado por

$$\mathbf{E} \{e'e\} = \mathbf{tr} (B'_a X B_a), \quad (3.38)$$

onde X é a solução para a seguinte equação matricial

$$A'_a X + X A_a + C'_a C_a = 0 \quad (3.39)$$

Usando as definições acima, considere o seguinte Lema:

Lema 2. *Seja o sistema (3.36), onde o par (A_a, C_a) é detectável. Se existem matrizes N, P, A_f, K_f e L_f tais que*

$$\min_{N, P, A_f, K_f, L_f} \mathbf{tr}(N), \quad (3.40)$$

$$\begin{bmatrix} N & B'_a P \\ \star & P \end{bmatrix} \geq 0, \quad P > 0 \quad (3.41)$$

$$\begin{bmatrix} A'_a P + P A_a & C'_a \\ \star & -I_{n_z} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.42)$$

então a variância do erro $e(t)$ é minimizada e $\mathbf{tr}(N)$ é um limitante superior para (3.38)

A prova para o Lema 2 é análoga à prova do Teorema 4. Nota-se que as condições (3.41) e (3.42) não são uma LMI pois não são convexas nas variáveis de decisão, entretanto pode-se torná-las convexas como será mostrado com a prova do Teorema 6.

Teorema 6. *Considere o sistema aumentado (3.36) composto pelo sistema (3.32) e pelo filtro robusto (3.35). A minimização da variância do erro (3.38) para todas as incertezas do sistema é obtida através da seguinte LMI, onde as variáveis de decisão são $M_A, P_0, P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_K \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$, $M_L \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$ e $N \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w}$.*

$$\min_{N, P_0, P_1, M_A, M_K, M_L} \mathbf{tr}(N), \quad (3.43)$$

sujeito às seguintes condições

$$P_1 - P_0 > 0, \quad P_0 > 0, \quad (3.44)$$

$$\begin{bmatrix} N & B'_i P_1 + D'_i M'_K & B'_i P_0 + D'_i M'_K \\ \star & P_1 & P_0 \\ \star & \star & P_0 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.45)$$

$$\begin{bmatrix} A'_i P_1 + P_1 A_i + M_K C_i + C'_i M'_K & M_A + A'_i P_0 + C'_i M'_K & L' \\ \star & M_A + M'_A & -M'_L \\ \star & \star & -I_{n_z} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (3.46)$$

para $i = 1, \dots, n_s$, onde as matrizes A_i , B_i , C_i e D_i definem o politopo \mathcal{D} das incertezas do sistema, de acordo com (3.33). As matrizes para o filtro robusto (3.35) são definidas como:

$$A_f = P_3^{-1} M_A (P'_3)^{-1}, \quad K_f = P_3^{-1} M_K, \quad L_f = M_L (P'_3)^{-1} P_2, \quad (3.47)$$

onde $P_2 = P'_2$ e P_3 são matrizes $n \times n$ quaisquer tal que $P_3 P_2^{-1} P'_3 = P_0$.

Prova: Será mostrado que a LMI (3.43)-(3.46) é equivalente à (3.40)-(3.42) com domínio das incertezas afim nas matrizes A_a e B_a . Inicialmente, define-se a matriz P de acordo com a partição de A_a de (3.37)

$$P := \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P'_3 & P_2 \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

onde as matrizes $P_1 = P'_1$ e $P_2 = P'_2$ são matrizes $n \times n$ positivas definidas. Sem perda de generalidade, assume-se que P_3 é não singular. Para verificar essa afirmação, perceba que a condição $P > 0$ de (3.41) é equivalente a $P_1 - P_3 P_2^{-1} P'_3 > 0$ com $P_2 > 0$, usando o Complemento de Schur para a partição (3.48). Dessa forma, é sempre possível substituir P_3 por $\tilde{P}_3 = P_3 + \alpha I_n$, para algum escalar $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que:

$$P_1 - P_3 P_2^{-1} P'_3 - \alpha (P_2^{-1} P'_3 + P_3 P_2^{-1} + \alpha P_2^{-2}) > 0.$$

Além disso, usando a mudança de variável $P_0 = P_3 P_2^{-1} P'_3$, a condição $P > 0$ de (3.41) pode ser reescrita como (3.44).

Usando as definições de A_a e C_a de (3.37) para os vértices do politopo \mathcal{D} definido em (3.33), a inequação (3.42) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} A'_i P_1 + P_1 A_i + P_3 K_f C_i + C'_i K'_f P'_3 & A'_i P_3 + P_3 A_f + C'_i K'_f P_2 & L' \\ \star & A'_f P_2 + P_2 A_f & -L'_f \\ \star & \star & -I_{n_z} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (3.49)$$

Multiplicando (3.49) à direita por J_1 e à esquerda por sua transposta, onde J_1 é definido em (3.50).

$$J_1 = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ \star & P_2^{-1} P'_3 & 0 \\ \star & \star & I_{n_z} \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

e introduzindo as seguintes mudanças de variável

$$P_0 = P_3 P_2^{-1} P'_3, \quad M_A = P_3 A_f P_2^{-1} P'_3, \quad M_K = P_3 K_f, \quad M_L = L_f P_2^{-1} P'_3, \quad (3.51)$$

a LMI (3.46) é obtida a partir da inequação (3.49).

Dando prosseguimento, será provada a equivalência entre a primeira inequação de (3.41) e a LMI (3.45). Usando a definição de B_a de (3.37), a inequação (3.41) é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} N & B'_i P_1 + D'_i K'_f P'_3 & B'_i P_3 + D'_i K'_f P_2 \\ \star & P_1 & P_0 \\ \star & \star & P_0 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (3.52)$$

Multiplicando (3.52) à direita por J_2 e à esquerda por sua transposta, onde J_2 é definido em (3.53).

$$J_2 = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ \star & I_n & 0 \\ \star & \star & P_2^{-1} P'_3 \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

e considerando as definições (3.51) para P_0 e M_K , a LMI (3.45) é obtida a partir da inequação (3.52), completando a prova. \square

4 IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Nesse capítulo abordam-se questões da identificação de sistemas que são relevantes para esse trabalho. O tema identificação de sistemas é bastante amplo e envolve a estrutura do modelo, objetivo do modelo, modelos estáticos ou dinâmicos, entre outras questões. Dar-se-á ênfase à estimação paramétrica em modelos dinâmicos com estrutura previamente definida.

No contexto desse trabalho, a identificação de sistemas restringe-se a estimação de parâmetros que define a dinâmica do sistema em questão. Para que a convergência da estimação dos parâmetros para seus valores correspondentes seja possível, é necessário que os sinais envolvidos nessa estimação possuam a propriedade conhecida como *excitação persistente*. Os resultados obtidos nessa tese estão relacionados à condição de excitação persistente de modo que quando a saída do sistema a ser estimado não possui a propriedade de excitação, nenhuma estimação é possível.

4.1 EXCITAÇÃO PERSISTENTE

A excitação persistente desempenha um importante papel nos métodos de identificação (SHIMKIN; FEUER, 1987). A condição de excitação persistente estabelece uma condição para a convergência paramétrica em métodos de identificação usando o vetor de sinais disponíveis do sistema, em específico a entrada e a saída do sistema. Uma vez que o vetor de entrada é escolhido, no caso geral, dedica-se atenção especial em como definir esse sinal para permitir que o sistema seja corretamente identificado (DASGUPTA; ANDERSON; TSOI, 1990; GOODWIN; PAYNE, 1977).

Considere o sistema linear invariante no tempo, controlável de ordem n e condição inicial $x(0) = x_0$ como descrito em (4.1). Sem perda de generalidade, considere a entrada escalar $u(t)$.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad (4.1)$$

onde o sinal de entrada $u(t)$ é uma função Lebesgue integrável¹ em todo intervalo finito de tempo.

O vetor $x(t)$ é o vetor das variáveis de estado utilizada para identificação. Para que haja convergência paramétrica, é necessário que as variáveis de

¹Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita Lebesgue integrável se existem funções degrais f_k tais que:
i. $\sum_{k=1}^{\infty} \int |f_k| dx < \infty$ e ii. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < \infty$. Portanto a integral de f é definida como $\int f = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k$ (DEBNATH; MIKUSINSKI, 2005).

estado $x(t)$ sejam excitação persistente, de acordo com a Definição 3.

Definição 3. (*Excitação Persistente*)(GOODWIN; PAYNE, 1977): A função Lebesgue quadrado-integrável $x(t)$ é dita ser excitação persistente se, e somente se, existem constantes positivas ε_1 e T , tal que, para todo $\tau \geq 0$,

$$\int_{\tau}^{\tau+T} x(t)x'(t)dt > \varepsilon_1 I_n, \quad (4.2)$$

onde T é o período de excitação de $x(t)$.

Definição 4. (*Entrada de Excitação Persistente*)(GOODWIN; PAYNE, 1977): A entrada Lebesgue integrável $u(t)$ é dita ser excitação persistente se, e somente se, produz variáveis de estado $x(t)$ de excitação persistente, uniformemente em x_0 , ou seja, existem ε_1 e T como na Definição 3 que é independente de x_0 .

As definições de excitação persistente 3 e 4 estão no contexto das variáveis de estado $x(t)$, entretanto essas definições podem ser facilmente estendidas para o caso de saída, ou seja, quando apenas $y(t) = Cx(t)$ está disponível para medição. As definições Definições 3 e 4 para a saída $y(t)$ de um sistema são obtidas simplesmente substituindo $x(t)$ por $y(t)$.

Uma vez que a maioria dos métodos paramétricos de identificação são definidos para sistemas discretos, a excitação persistente é geralmente apresentada de uma forma distinta, como mostrado a seguir na Definição 5.

Para a definição seguinte, considere $z(k)$ um sinal discreto que representa o estado de sistema, composto das amostras $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$

Definição 5. (*Excitação Persistente Discreta*)(SÖDERSTRÖM; STOICA, 1988): O sinal $z(k)$ é uma excitação persistente de ordem n se:

i. existe o limite

$$r_u(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z(k+\tau)z'(k); \quad (4.3)$$

e

ii. a matriz

$$R_u(n) = \begin{bmatrix} r_u(0) & r_u(1) & \dots & r_u(n-1) \\ r_u(-1) & r_u(0) & \dots & r_u(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_u(1-n) & r_u(2-n) & \dots & r_u(0) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

é simétrica e positiva definida.

Comentário 2. Uma vez que muitos processos estacionários são ergódicos, nesses casos, na Definição 5, pode-se substituir $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N}$ pela esperança matemática. Portanto a matriz $R_u(n)$ é a covariância quando a média de $z(k)$ é zero. ■

Comentário 3. Outra forma equivalente de definir a excitação persistente é proposta por (GOODWIN; SIN, 2009): O sinal $z(k)$ é uma excitação persistente de ordem n se, para todo T existe um m tal que:

$$\alpha_1 I > \sum_{k=T}^{T+m} \phi(T) \phi'(T) > \alpha_2 I, \quad (4.5)$$

onde $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ e o vetor $\phi(T)$ é definido como

$$\phi(T) = [z'(T-1) \quad z'(T-2) \quad \dots \quad z'(T-n)]'. \quad (4.6)$$

■

As duas definições são equivalentes, uma vez que a matriz (4.4) pode ser escrita como:

$$R_u(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi(T) \phi'(T). \quad (4.7)$$

Note que na relação acima, com (4.5), se $\phi(T)$ é limitado, essa definição é semelhante à Definição 3 para excitação persistente em sinais contínuos.

4.2 MÍNIMOS QUADRADOS

Há vasta literatura para o método dos mínimos quadrados aplicado a identificação de sistemas, entretanto aplicado exclusivamente a sistemas em tempo discreto. Para utilizar o método dos mínimos quadrados discreto na identificação de um sistema contínuo, utiliza-se amostragem do sinal. A identificação de parâmetros em sistemas contínuos sem amostragem é encontrado em (DAVILA; BASIN; FRIDMAN, 2010) utilizando-se diretamente a definição de excitação persistente. Em (MOORE, 1987) utilizou-se a abordagem denominada de Mínimos Quadrados Estendido para a identificação de sistemas contínuos.

Uma vez que os sistemas em espaço de estados não têm representação única, a identificação é geralmente aplicada a funções de transferência ou nas formas canônicas de controlabilidade ou observabilidade. Inicialmente será mostrado o método dos mínimos quadrados para sistemas discretos. Para esse

fim, considere o seguinte modelo:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_{n_a} y(k-n_a) + b_1 u(k-1) + \dots + b_{n_b} u(k-n_b). \quad (4.8)$$

Utiliza-se, por conveniência a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \theta' &= [a_1 \quad \dots \quad a_{n_a} \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n_b}], \\ z'(k) &= [-y(k-1) \quad \dots \quad -y(k-n_a) \quad u(k-1) \quad \dots \quad u(k-n_b)]. \end{aligned}$$

Portanto, (4.8) pode ser representado por

$$y(k) = \theta' z(k). \quad (4.9)$$

Por fim, o objetivo é determinar o vetor de parâmetros θ usando como informação o sinal de medição $y(k)$ e a entrada $u(k)$, que formam o vetor $z(k)$.

Se o vetor θ de parâmetros é constante, ou seja, se a igualdade (4.8) é válida em todos os instantes $1, \dots, k$, então

$$\begin{aligned} y(1) &= z'(1)\theta, \\ y(2) &= z'(2)\theta, \\ &\vdots \\ y(k) &= z'(k)\theta. \end{aligned}$$

As equações acima podem ser escritas como:

$$Y = Z\theta, \quad (4.10)$$

onde $Y' = [y(1) \quad y(2) \quad \dots \quad y(k)]$ e $Z' = [z(1) \quad z(2) \quad \dots \quad z(k)]$.

Quando $k > n_a + n_b$, o sistema de equações (4.10) é sobredeterminado, portanto não existe uma solução exata, de forma geral. Uma solução é encontrar uma estimativa $\hat{\theta}$ de θ que minimiza os erros $e(t)$ definidos abaixo nos tempos $t = 1, \dots, k$:

$$e(t) = y(t) - z(t)\theta. \quad (4.11)$$

Com esse objetivo, introduz-se o seguinte funcional:

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^k e^2(t) = \frac{1}{2} e' e = \frac{1}{2} \|e\|^2, \quad (4.12)$$

onde $e' = [e(1) \quad e(2) \quad \dots \quad e(k)]$.

A solução $\hat{\theta}$ que minimiza (4.12) é obtida aplicando-se o seguinte lema:

Lema 3. (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1988) *Considerando o funcional (4.12), supondo que $Z'Z$ é positiva definida. Então $J(\theta)$ possui um ponto de mínimo único dado por*

$$\hat{\theta} = (Z'Z)^{-1} Z'Y. \quad (4.13)$$

Prova: Usando (4.10), (4.11) e (4.12) obtém-se a forma explícita de $J(\theta)$, mostrando-se que $J(\theta)$ é uma função de θ com termo quadrático, linear e constante, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} J(\theta) &= \frac{1}{2} (Y - Z\theta)' (Y - Z\theta) \\ &= \frac{1}{2} (\theta' Z' Z \theta - \theta' Z' Y - Y' Z \theta + Y' Y), \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} J(\theta) &= \frac{1}{2} (\theta - (Z'Z)^{-1} Z'Y)' Z'Z (\theta - (Z'Z)^{-1} Z'Y) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (Y'Y - Y'(Z'Z)^{-1} Z'Y). \end{aligned} \quad (4.14)$$

O segundo termo de (4.14) não depende de θ . Uma vez que $Z'Z$ é positivo definido, o primeiro termo é sempre maior ou igual a zero. Portanto $J(\theta)$ assume o mínimo quando a primeira parcela de (4.14) é zero, que ocorre somente quando $\theta - (Z'Z)^{-1} Z'Y = 0$, resultando em (4.13). \square

Para implementações práticas, ao invés de armazenar Z e Y , pode-se reescrever (4.13) da seguinte forma:

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{k=1}^N z(k) z'(k) \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^N z(k) y'(k) \right). \quad (4.15)$$

Com isso, a solução do problema não depende da dimensão de Z mas sim da dimensão de $z(k)$.

A implementação do método dos mínimos quadrados é muitas vezes realizada usando o Método dos Mínimos Quadrados Recursivo. Mais detalhes desse método encontram-se em (LJUNG, 1987).

Para sistemas contínuos, a grande maioria das referências encontradas na literatura utiliza algum tipo de amostragem em algum estágio do método, permitindo a utilização do Lema 3. Considere o seguinte sistema linear, em tempo contínuo, na forma de função de transferência (MIKLEŠ; FIKAR,

2007):

$$A(s)Y(s) = B(s)U(s), \quad (4.16)$$

onde $A(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n$ e $B(s) = b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m$. Considera-se que o sistema (4.16) seja estritamente próprio, ou seja $m < n$.

Se todas as derivadas da entrada u e da saída y estão disponíveis, os coeficientes a_i e b_i podem ser estimados diretamente. Entretanto, como esses sinais não são geralmente medidos diretamente, utiliza-se um filtro $C(s)$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{A(s)}{C(s)}Y(s) &= \frac{B(s)}{C(s)}U(s), \\ A(s)Y_f(s) &= B(s)U_f(s), \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde $Y_f(s) = \frac{1}{C(s)}Y(s)$ e $U_f(s) = \frac{1}{C(s)}U(s)$.

Se o grau do polinômio $C(s)$ é maior ou igual a n , todas as derivadas de $Y_f(s)$ e $U_f(s)$ estão disponíveis. A estrutura do polinômio $C(s)$ geralmente é escolhida como:

$$C(s) = (1 + c_0s)^{n_c}, \quad (4.18)$$

onde c_0 é a constante de tempo do filtro e deve ser menor do que a menor constante de tempo do polinômio $A(s)$.

Se os sinais u_f e y_f e suas derivadas são medidas em intervalos de amostragem T , o problema da identificação de acordo com (4.9) está posto com:

$$\begin{aligned} y_f^{(n)}(k) &= \theta^T z(k), \\ \theta^T &= [a_0 \quad \dots \quad a_n \quad b_0 \quad \dots \quad b_m], \\ z^T(k) &= \begin{bmatrix} -\dot{y}_f(k) & \dots & -y_f^{(n-1)}(k) & u_f(k) & \dot{u}_f(k) & \dots & u_f^{(m)}(k) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde $y_f^{(j)}$ indica a derivada temporal de ordem j de y_f e de forma equivalente para u_f .

Se as derivadas são diretamente mensuráveis, estes valores podem ser inseridos diretamente na matriz Z em (4.19), portanto $Z'Z$ pode ser diretamente calculado em (4.13). Quando as derivadas não são mensuráveis, essas devem ser determinadas a partir dos sinais $u(t)$ e $y(t)$. Para isso, as abordagens encontradas na literatura são basicamente a diferenciação numérica e filtragem das variável de estado. Ao utilizar a diferenciação numérica, quando

é necessário determinar um grande número de derivadas, o esforço computacional pode ser consideravelmente maior do que a filtragem (ISERMANN, 2005).

5 OBSERVADORES CHAVEADOS

Como a primeira contribuição deste trabalho, apresenta-se uma abordagem para estimação de estados e de parâmetros utilizando observadores chaveados. Os parâmetros são estimados através de uma combinação convexa definida a partir dos trabalhos de Fillipov (1988) para sistemas descritos através de inclusão diferencial e os estados são estimados através de um observador chaveado onde os ganhos e a lei de chaveamento são determinados de modo a garantir a convergência dos erros de estimação, tanto de estados como de parâmetros.

Considere o seguinte sistema afim invariante no tempo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + b + Br(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Dr(t),\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor das variáveis de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o vetor de medições. Assume-se que o sistema é exponencialmente estável e $\bar{x} = -A^{-1}b$ é o ponto de equilíbrio para $r(t) = 0$. O sinal $r(t) \in \mathbb{R}^{n_r}$ é um vetor de entradas que pode assumir diferentes características, de acordo com os resultados a serem apresentados na sequência. Assume-se que as matrizes $B \in \mathbb{R}^{n \times n_r}$, $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_r}$ são matrizes dadas. As matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ possuem elementos desconhecidos do sistema a serem determinados. Assume-se que a matriz A é Hurwitz e (A, b) pertence a um politopo definido através dos vértices (A_i, b_i) , $i \in \mathbb{I}_m = \{1, 2, \dots, m\}$, ou seja, existe um parâmetro $\bar{\theta} \in \Theta_m$, aqui chamado de parâmetro de combinação convexa, tal que:

$$A = A_{\bar{\theta}} = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i A_i, \quad b = b_{\bar{\theta}} = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i b_i,\tag{5.2}$$

Portanto, qualquer par (A_{θ}, b_{θ}) com $\theta \in \Theta_m$ é visto como um candidato para as matrizes do sistema (A, b) . Dessa forma necessita-se que A_{θ} seja Hurwitz $\forall \theta \in \Theta_m$, com θ arbitrário e fixo.

De modo a estimar os estados $x(t)$ e parâmetros auxiliares $\bar{\theta}$, que por sua vez definem os parâmetros físicos através de (5.2), considere o observador chaveado (5.3), para o caso mais geral, onde o sinal de entrada $r(t)$ não é conhecido.

$$\dot{z}(t) = A_{\theta} z(t) + b_{\theta} + L_{\theta} (y(t) - Cz(t))\tag{5.3}$$

onde

$$(A_{\theta}, b_{\theta}, L_{\theta}) = \sum_{i \in \sigma(\epsilon)} \theta_i(x, z, r) (A_i, b_i, L_i)\tag{5.4}$$

onde $\sigma(\varepsilon) \in \mathcal{P}(\mathbb{I}_m)$ e $\mathcal{P}(\cdot)$ denota o conjunto potência. $\sigma(\varepsilon)$ representa uma lei de chaveamento a ser determinada e $\varepsilon(t)$ representa o vetor dos sinais que estão disponíveis em tempo real. $\theta(x, z, r) \in \Theta_m$ é uma função vetorial de combinação convexa como descrita na Seção 2.2. Observe que $\theta(x, z, r)$ não é disponível em tempo real mas pode ser estimado a partir de $\sigma(\varepsilon)$, como mostraremos no Comentário 6 no final do Capítulo 6.

Como hipótese assumiremos que a função $\sigma(\varepsilon)$ é constante por partes e que $\theta(x, z, r) \in \Theta_m$ é contínua por partes. Em particular, como $\theta_i(z, x, r) = 0$ para $i \notin \sigma(\varepsilon)$ pode-se reescrever (5.4) de uma forma alternativa como:

$$(A_\theta, b_\theta, L_\theta) = \sum_{i=1}^m \theta_i(x, z, r)(A_i, b_i, L_i), \quad (5.5)$$

que é a forma que será comumente utilizada a partir deste ponto, em especial sempre que o papel de $\sigma(\varepsilon)$ na caracterização de $\theta(z, x, r)$ estiver claro no contexto.

Como esse parâmetro de combinação convexa, de acordo com Filippov $\theta(x, z, r)$ é de difícil caracterização, uma estimativa desse parâmetro se faz necessária para o observador (5.3). Esse ponto será abordado posteriormente no Comentário 6 do Capítulo 6. A suposição que $\sigma(\varepsilon(t))$ e $\theta(z(t), x(t), r(t))$ em (5.3), vistas como função do tempo, são, respectivamente, constante por partes e contínua por partes, garante que a equação diferencial (5.3) possua um número finito de pontos de descontinuidades na parcela à direita em qualquer intervalo finito de tempo, implicando que a solução da inclusão diferencial (5.3) existe, o que significa que $z(t)$ é uma função absolutamente contínua dada por $z(t) = z(0) + \int_0^t \dot{z}(t)dt$ onde $\dot{z}(t)$ satisfaz (5.3) para quase todo $t \in [0, \infty)$. Mais detalhes em relação a esse ponto encontram-se em (FILIPPOV, 1988, p. 50).

Os ganhos L_i de cada subsistema e a lei de chaveamento do observador chaveado (5.3) devem ser determinados de modo a satisfazerem a seguinte condição de convergência:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - z(t)) = 0 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (A_\theta, b_\theta) = (A_{\bar{\theta}}, b_{\bar{\theta}}). \quad (5.6)$$

Considerando $r(t) = 0$ em (5.1), sem perda de generalidade, uma vez que o observador (5.3) é projetado para satisfazer os requisitos de convergência (5.6) tem-se também que $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = -A_{\bar{\theta}}^{-1}b_{\bar{\theta}}$, ou seja, $\bar{x} = \bar{z} = -A_{\bar{\theta}}^{-1}b_{\bar{\theta}}$ onde \bar{x}, \bar{z} são os pontos de equilíbrio de (5.1) e (5.3) respectivamente. Mesmo quando \bar{x} e $\bar{\theta}$ são desconhecidos, alguns elementos do ponto de equilíbrio \bar{x} são geralmente conhecidos. Esse é o caso, por exemplo, quando elementos do vetor de estados são derivadas de outros elementos do vetor de estados,

que em equilíbrio igualam-se a zero. Define-se por $E_a C\bar{x}$ o vetor que especifica os sinais da saída $y(t)$ no equilíbrio. De forma equivalente, define-se $E_b \bar{x}$ o vetor contendo todas as variáveis de estado conhecidas no equilíbrio. As matrizes $E_a \in \mathbb{R}^{n_a \times n_y}$ e $E_b \in \mathbb{R}^{n_b \times n}$ são consideradas matrizes dadas. Por fim, define-se o sinal de erro:

$$\varepsilon(t) = \begin{bmatrix} y(t) - Cz(t) \\ E_a (y(t) - C\bar{x}) \\ E_b (z(t) - \bar{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_\varepsilon}, \quad n_\varepsilon = n_y + n_a + n_b, \quad (5.7)$$

cujos elementos estão disponíveis por medição da saída do sistema, são conhecidas pois são as variáveis de estados do observador ou são elementos conhecidos de \bar{x} . Na definição de $\varepsilon(t)$ em (5.7) considera-se a situação onde $r(t)$ é conhecido ou é um distúrbio com média nula. Essas situações serão abordadas especialmente no Capítulo 8. Por simplificar a notação, daqui em diante não explicitaremos a dependência temporal das variáveis sempre que essa simplificação for conveniente.

Quando $\sigma(\varepsilon)$ é um conjunto unitário, ou seja, quando $\sigma(\varepsilon) = \{i\}$, o parâmetro $\theta(x, z, r)$ é tal que $\theta_i(x, z, r) = 1$ e portanto $\theta_j(x, z, r) = 0$, $\forall j \neq i$. Quando $\sigma(\varepsilon)$ não é unitário e o movimento de modos deslizantes está ocorrendo, o objetivo de $\theta(x, z, r)$ é manter o campo vetorial do sistema no hiperplano tangente da superfície de chaveamento onde o movimento de deslizamento está ocorrendo. Para mais detalhes veja (FILIPPOV, 1988, p. 50).

Nos instantes de tempo nos quais $\sigma(\varepsilon) = \{i\}$ é um conjunto unitário, o observador (5.3) assume uma estrutura particular, como mostrado abaixo.

$$\dot{z}(t) = A_i z(t) + b_i + L_i (y(t) - Cz(t)) \quad (5.8)$$

O erro de estimação de estados é definido como $e(t) = x(t) - z(t)$. Usando a notação (5.5) obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & (A_\theta - L_\theta C) e(t) + (A_{\bar{\theta}} - A_\theta) (x(t) - \bar{x}) \\ & + (A_{\bar{\theta}} - A_\theta) \bar{x} + b_{\bar{\theta}} - b_\theta + (B - L_\theta D) r(t) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Uma vez que o vetor de medição $\varepsilon(t)$ em (5.7) pode ser expresso como uma função de $e(t)$, $x(t)$ e $r(t)$ segue que

$$\varepsilon(t) = E \zeta(t), \quad \zeta = \begin{bmatrix} e \\ e_x \\ r \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} e &= x - z \\ e_x &= x - \bar{x} \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$E = \left[\begin{array}{c|c|c} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c} C & \mathbf{0} & D \\ \mathbf{0} & E_a C & E_a D \\ -E_b & E_b & \mathbf{0} \end{array} \right]$$

A fim de estimar $\bar{\theta}$ e os estados do sistema de acordo com os critérios de convergência (5.6), introduz-se o seguinte conjunto de funções auxiliares $v_i(e, e_x, r)$, como apresentadas abaixo:

$$v_i(e, e_x, r) = \varepsilon' P_i \varepsilon + 2\varepsilon' S_i - 2\varepsilon' S_{\bar{\theta}} + e' Q_{\bar{\theta}} e + e'_x M_{\bar{\theta}} e_x \quad (5.11)$$

onde $S_{\bar{\theta}} \in \mathbb{R}^{n_\varepsilon}$, $Q_{\bar{\theta}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $M_{\bar{\theta}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são definidas de forma semelhante à notação (5.2), ε é definido em (5.7) e $P_i \in \mathbb{R}^{n_\varepsilon \times n_\varepsilon}$, Q_i , S_i , M_i são matrizes a serem determinadas.

Baseado nas funções auxiliares $v_i(e, e_x, r)$ indicadas em (5.11), considera-se neste trabalho a seguinte lei de chaveamento caracterizada pela função-conjunto, também chamada de sinal de chaveamento

$$\begin{aligned} \sigma(\varepsilon) &= \arg \max_{i \in \mathbb{I}_m} \{v_i(e, e_x, r)\} \\ &= \arg \max_{i \in \mathbb{I}_m} \{\varepsilon' P_i \varepsilon + 2\varepsilon' S_i\}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Nota-se que apesar da dependência das funções auxiliares v_i com respeito a (e, e_x, r) e ao parâmetro incerto $\bar{x}, \bar{\theta}$, a lei de chaveamento σ é determinada em tempo real apenas utilizando o sinal medido ε e os parâmetros P_i, S_i , que são previamente calculados.

A estrutura do observador chaveado proposto é apresentada na Fig. 6 para sistemas onde a entrada $r(t)$ é desconhecida, nesse caso simbolizada por $w(t) = r(t)$. Para o diagrama de blocos apresentado na Fig. 7, o sinal de entrada $r(t)$ é considerado conhecido. Nessa situação, $r(t)$ é utilizado na dinâmica do observador (5.3), resultando em simplificações que serão discutidas mais adiante. Nos observadores mostrados nas Fig. 7 e 6 o sinal $\sigma(\varepsilon(t))$ especifica quais são os modos ativos em cada instante de tempo. Percebe-se que o sinal de entrada em $\sigma(\varepsilon(t))$ é apenas $\varepsilon(t)$, que é composto unicamente dos sinais de entrada $y(t)$ e $z(t)$, além da parte conhecida, se houver, do equilíbrio \bar{x} .

Considerando $r(t) = 0$, a condição $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$ implica que a condição de equilíbrio do sistema (5.9), isto é, $\dot{e} = e = 0$, para ser satisfeita necessita que $(A_{\bar{\theta}} - A_{\hat{\theta}})\bar{x} + b_{\bar{\theta}} - b_{\hat{\theta}} = 0$ onde

$$\hat{\theta} = \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(e(t), e_x(t), r(t)) = \theta(0, 0, 0). \quad (5.13)$$

Como $\bar{x} = -A_{\bar{\theta}}^{-1} b_{\bar{\theta}}$, a condição $(A_{\bar{\theta}} - A_{\hat{\theta}})\bar{x} + b_{\bar{\theta}} - b_{\hat{\theta}} = 0$ pode ser

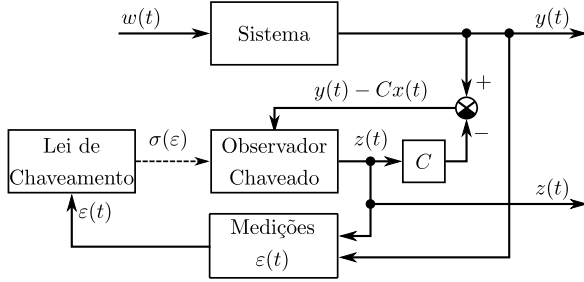


Figura 6 – Observador chaveado com entrada desconhecida

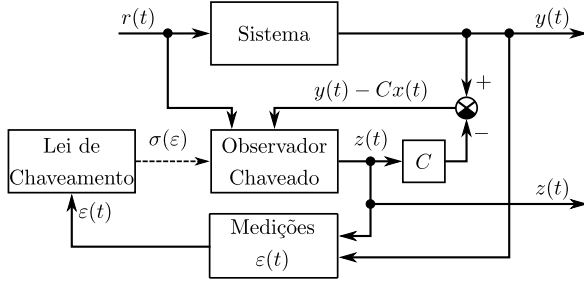


Figura 7 – Observador chaveado com entrada conhecida

reescrita como $A_{\hat{\theta}}\bar{x} + b_{\hat{\theta}} = 0$. Observando que $\varepsilon = 0$ no equilíbrio, define-se a função de chaveamento no equilíbrio como:

$$\sigma(0) = \left\{ \text{todo } i \in \mathbb{I}_m : \hat{\theta}_i \neq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^m (A_i\bar{x} + b_i)\hat{\theta}_i = 0 \right\}. \quad (5.14)$$

A expressão (5.14) mostra que a condição de equilíbrio implica que o par $(A_{\hat{\theta}}, b_{\hat{\theta}})$ está associado com o mesmo ponto de equilíbrio \bar{x} . Entretanto, isso não implica, em geral, que $(A_{\hat{\theta}}, b_{\hat{\theta}}) = (A_{\bar{\theta}}, b_{\bar{\theta}})$. Isso mostra que se a exigência da convergência de parâmetros em (5.6) é pretendida, faz-se necessário impor condições adicionais a fim de se obter $\hat{\theta} = \bar{\theta}$. Note que se a representação de (A, b) como uma combinação convexa dos vértices $(A_i, b_i), i \in \mathbb{I}_m$ não é única, podemos ter $(A_{\hat{\theta}}, b_{\hat{\theta}}) = (A_{\bar{\theta}}, b_{\bar{\theta}})$ mesmo se $\hat{\theta} \neq \bar{\theta}$. Esses pontos serão discutidos na Seção 8.1.

Comentário 4. Nas situações onde os parâmetros a serem estimados estão no interior do invólucro convexo do conjunto $\{(A_i, b_i), i \in \mathbb{I}_m\}$, o equilíbrio

$e(t) = \dot{e}(t) = 0$ com $\theta = \hat{\theta}$ é sempre obtido através de modos deslizantes. Isso implica que, se a ocorrência de modos deslizantes é impedida, por limitação de frequência de chaveamento por exemplo, a caracterização exata dos parâmetros não poderá ser obtida, em geral. ■

6 ESTIMAÇÃO DE ESTADOS E PARÂMETROS

Neste capítulo apresenta-se uma técnica de projeto do observador chaveado descrito no Capítulo 5. Considera-se o sistema descrito em (5.1), reescrito abaixo a título de conveniência. Considera-se o sinal de entrada $r(t)$ conhecido, bem como a matriz B , entretanto sem que haja transferência direta de $r(t)$ para a saída, ou seja $D \equiv \mathbf{0}$. O vetor dos sinais conhecidos é definido apenas como o erro de saída, ou seja $\varepsilon(t) = y(t) - Cz(t)$, onde $E_a = \mathbf{0}$ e $E_b = \mathbf{0}$.

Seja o sistema abaixo com estado e parâmetros (A, b) a serem estimados:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + b + Br(t), \\ y(t) &= Cx(t).\end{aligned}\tag{6.1}$$

Seja o observador chaveado abaixo, semelhante ao apresentado em (5.3) com o termo adicional $Br(t)$.

$$\dot{z}(t) = A_\theta z(t) + b_\theta + L_\theta (y(t) - Cz(t)) + Br(t),\tag{6.2}$$

onde as matrizes A_θ , b_θ e L_θ utilizadas acima seguem a mesma notação de (5.4).

Para o sistema (6.1) e a dinâmica do observador, define-se o erro de estimação das variáveis de estado como $e(t) = x(t) - z(t)$. A dinâmica do erro de observação é mostrada em (6.3), na qual uma vez que tem-se $r(t)$ e B conhecidos, esses termos são eliminados.

$$\dot{e}(t) = (A_{\bar{\theta}} - L_\theta C) e(t) + (A_{\bar{\theta}} - A_\theta) z(t) + (b_{\bar{\theta}} - b_\theta).\tag{6.3}$$

Nesse resultado apresenta-se uma abordagem por LMIs para o problema de projeto do ganho L_θ e da lei de chaveamento $\sigma(\varepsilon)$ do observador (6.2). Com essa finalidade utilizam-se as funções auxiliares mostradas abaixo, que são equivalentes às mostradas em (5.11) sem a matriz $M_{\bar{\theta}}$, o que acarreta algumas simplificações que são descritas mais adiante.

$$v_i(e) = \varepsilon' P_i \varepsilon + 2\varepsilon' S_i - 2\varepsilon' S_{\bar{\theta}} + e' Q_{\bar{\theta}} e.\tag{6.4}$$

onde $S_{\bar{\theta}} \in \mathbb{R}^{n_\varepsilon}$ e $Q_{\bar{\theta}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são definidas de forma semelhante à notação (5.2), $\varepsilon(t) = y(t) - Cz(t)$ e P_i , Q_i , S_i são matrizes a serem determinadas.

Para mostrar as condições de convergência (5.6), propõe-se uma função candidata a Lyapunov baseada na função max de um conjunto de funções quadráticas auxiliares (6.4) como mostrado abaixo.

$$\begin{aligned}
V(e) &= \max_{i \in \mathbb{I}_m} \{v_i(e)\}, \\
&= \max_{i \in \mathbb{I}_m} \{e' C' P_i C e + 2e' C' S_i\} - 2e' C' S_{\bar{\theta}} + e' Q_{\bar{\theta}} e.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

As funções auxiliares $v_i(e)$ são continuamente diferenciáveis e portanto $V(e)$ é localmente Lipschitz contínua, mas não é diferenciável em todo ponto, por isso será dedicada uma atenção especial para mostrar o decréscimo de $V(e)$ utilizando a derivada direcional. Além disso, de (5.12) e (6.5) conclui-se que, como $V(e)$ é o máximo de um conjunto de funções e que $\sigma(\varepsilon)$ é o *argmax* do mesmo conjunto de funções, para todos os elementos i em $\sigma(\varepsilon)$ temos $V(e) = v_i(e)$ e $\theta_i(x, z) \in (0, 1)$. Para $i \notin \sigma(\varepsilon)$ teremos $\theta_i(x, z) = 0$ e $V(e) > v_i(e)$. Isso permite representar $V(e)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
V(e) &= \max_{i \in \mathbb{I}_m} \{v_i(e)\} \\
&= \sum_{i \in \sigma} \theta_i v_i(e) = \sum_{i=1}^m \theta_i v_i(e) \\
&= e' C' P_{\theta} C e + 2e' C' (S_{\theta} - S_{\bar{\theta}}) + e' Q_{\bar{\theta}} e,
\end{aligned} \tag{6.6}$$

onde P_{θ} , S_{θ} , $S_{\bar{\theta}}$, e $Q_{\bar{\theta}}$ foram anteriormente definidos.

Antes do resultado principal, que estabelece as condições suficientes para a convergência de (5.6), algumas notações auxiliares são introduzidas.

Seja $\alpha > 0$ um escalar positivo dado, tal que $T' A_i T + \frac{\alpha}{2} I_{n_c}$ seja Hurwitz¹ $\forall i \in \mathbb{I}_m$ onde $T : \mathbb{R}^{n_c} \rightarrow \mathbb{R}^{n_c}$, $CT = 0$ é uma base ortonormal para o espaço nulo de C . Seja $\mathfrak{K}_{\theta} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^{r \times m}$ um anulador linear de θ , como descrito no Capítulo 2.3, ou seja, \mathfrak{K}_{θ} é uma função linear tal que $\mathfrak{K}_{\theta} \theta = 0, \forall \theta \in \Theta_m$, seja \mathcal{Z} um politopo dado.

Considere as seguintes LMIs:

$$C' P_i C + Q_i > 0, \tag{6.7}$$

$$N' (\Gamma(\theta, \bar{\theta}, z) + \langle G_a C_a(\theta, \bar{\theta}) + G_b C_b(\theta, \bar{\theta}, z) \rangle) N < 0, \tag{6.8}$$

¹Como suposição, a matriz A_{θ} do sistema é Hurwitz $\forall \theta \in \Theta_m$. Em particular, A_i deve ser Hurwitz $\forall i \in \mathbb{I}_m$ e portanto sempre existe um $\alpha > 0$ tal que $T' A_i T + \frac{\alpha}{2} I_{n_c}$ seja Hurwitz $\forall i \in \mathbb{I}_m$. Essa escolha de α não é ótima para o problema e é inspirada em (TROFINO et al., 2011a, Remark 1). A melhor escolha de α pode ser obtida usando a técnica de malha (*gridding*).

$\forall \bar{\theta}, \theta \in \Theta_m$ e $z \in \mathcal{Z}$, com a notação $\langle X \rangle = X + X'$ e

$$\begin{aligned}
 \Gamma(\theta, \bar{\theta}, z) &= \begin{bmatrix} -\alpha C'(P_{\bar{\theta}} - P_{\theta})C & \star & \star & \star \\ C'P_{\theta}C + Q_{\bar{\theta}} & \mathbf{0}_n & \star & \star \\ C'P_{\theta}C + Q_{\bar{\theta}} & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \star \\ -\alpha S'C & -S'C & \mathbf{0}_{m \times n} & \Phi(z) \end{bmatrix}, \\
 \Phi(z) &= -\langle S'C(A_z + B_a) \rangle, \\
 C_a(\theta, \bar{\theta}) &= \begin{bmatrix} GA_{\bar{\theta}} - H_{\theta}C & -G & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times m} \end{bmatrix}, \\
 C_b(\theta, \bar{\theta}, z) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & -I_n & A_z + B_a \\ \mathbf{0}_{r \times n} & \mathbf{0}_{r \times n} & \mathbf{0}_{r \times n} & \mathfrak{K}_{\bar{\theta} - \theta} \end{bmatrix}, \\
 N &= \text{null}(\tilde{N}), \\
 \tilde{N} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{0}_{1 \times n} & \mathbf{1}_{1 \times m} \end{bmatrix}, \\
 G_a &= \begin{bmatrix} I_n & I_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times m} \end{bmatrix}', \\
 A_z &= \begin{bmatrix} A_1z & A_2z & \dots & A_mz \end{bmatrix}, \\
 B_a &= \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

As variáveis de decisão do problema LMI (6.7) e (6.8) são P_i , G_b , Q_i , G , H_i e S com as seguintes dimensões:

$$\begin{aligned}
 P_{\theta} &= P'_{\theta} = \sum_{i=1}^m \theta_i P_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}, & G &\in \mathbb{R}^{n \times n}, \\
 Q_{\bar{\theta}} &= Q'_{\bar{\theta}} = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, & G_b &\in \mathbb{R}^{(3n+m) \times (n+r)}, \\
 S &= \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_y \times m}, & H_{\theta} &= \sum_{i=1}^m \theta_i H_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n}.
 \end{aligned}$$

Considerando a lei de chaveamento (5.12) e as notações mostradas acima, apresenta-se o seguinte teorema.

Teorema 7. *Assuma que o sistema (6.1) apresenta a matriz A Hurwitz e satisfaz a decomposição (5.2). Seja \mathcal{Z} um dado politopo positivamente invariante para o sistema (6.2) e suponha $z(0) \in \mathcal{Z}$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}^+$ suponha que existam matrizes P_i , Q_i , S_i , H_i , $i \in \mathbb{I}_m$, G_b e G que satisfaçam as condições LMI (6.7) e (6.8) e defina os ganhos do observador como $L_i = G^{-1}H_i$. Então, o observador chaveado (6.2) com a lei de chaveamento (5.12) satisfaz as condições de convergência do erro (5.6), $\forall x(t) \in \mathbb{R}^n$ com $z(t) \in \mathcal{Z}$, $\forall t \geq 0$. Além disso*

(6.5) é uma função de Lyapunov para o sistema de erros (6.3).

Prova: A prova consiste em mostrar que se as LMIs (6.7) e (6.8) são satisfeitas, então a função localmente Lipschitz (6.5) satisfaz as seguintes condições:

$$\phi_1(e) \leq V(e) \leq \phi_2(e), \quad (6.10)$$

$$\mathbf{D}_h V(e) \leq -\phi_3(e), \quad (6.11)$$

onde $\phi_1(e)$, $\phi_2(e)$ e $\phi_3(e)$ são funções contínuas positivas definidas, $\mathbf{D}_h V(e)$ é a derivada direcional unilateral de V na direção $h = \dot{e}$, dada por

$$\mathbf{D}_h V(e) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V(e + \varepsilon h) - V(e)}{\varepsilon} = \max_{i \in \sigma(e)} \nabla v_i(e) h, \quad (6.12)$$

onde $\nabla v_i(e)$ é um vetor linha que indica o gradiente de $v_i(e)$ (LASDON, 1970, p. 420).

Os principais argumentos usados são os seguintes:

- i. As condições (6.10) e (6.11) implicam que V é positiva definida e sua derivada negativa definida, e portanto $V(e)$ decresce;
- ii. Uma vez que $\phi_1(e) \leq V(e)$ conclui-se que $\phi_1(e)$ decresce levando assintoticamente a estimação do erro $e(t)$ para zero;
- iii. A convergência $\lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{\theta} - \theta(x, z)) = 0$ segue do fato que $V(e)$ é positiva definida e (6.11) é negativa definida nas variáveis $(e, \bar{\theta} - \theta(x, z))$. Isso implica que $\bar{\theta} - \theta(x, z) = 0$ é uma condição necessária para $V(e) = 0$, caso contrário $V(e)$ iria decrescer a partir de zero tornando-se negativa, o que contradiz a condição de positividade definida de V ;
- iv. Em (6.4), $v_i(e)$ são funções contínuas diferenciáveis e portanto $V(e)$ em (6.5) é uma função localmente Lipschitz contínua². Isso implica que, em particular, a derivada direcional e a derivada temporal coincidem em quase toda parte, levando a inequação $\frac{d}{dt} V(e) < 0$ a ser satisfeita em quase todo $t \geq 0$, no sentido da medida de Lebesgue.

Os detalhes da prova são dados a seguir.

Para V em (6.5) segue a partir de (6.12) que

$$\mathbf{D}_h V(e) := \max_{i \in \sigma(\varepsilon)} \nabla v_i(e) h, \quad (6.13)$$

² Uma função continuamente diferenciável é localmente Lipschitz e que $\max(v_1, v_2) = (v_1 + v_2 + |v_1 - v_2|)/2$. Assim, é fácil de perceber que se v_1 e v_2 são localmente Lipschitz, $\max(v_1, v_2)$ também é.

onde o gradiente é um vetor linha definido como:

$$\nabla v_i(e) = \frac{\partial v_i(e)}{\partial e}. \quad (6.14)$$

Inicialmente, será demonstrado que a condição (6.10) é satisfeita. Para isso, verifica-se que para um elemento arbitrário $\tilde{\theta} \in \Theta_m$ a seguinte relação é verdadeira:

$$V(e) \geq e' C' P_{\tilde{\theta}} C e + 2e' C' (S_{\tilde{\theta}} - S_{\bar{\theta}}) + e' Q_{\tilde{\theta}} e. \quad (6.15)$$

Isso é verdade para qualquer $\tilde{\theta} \in \Theta_m$, porque $V(e)$ é o máximo elemento de um conjunto de funções e a parcela à direita de (6.15) é uma combinação convexa particular dos elementos desse conjunto. Em especial, quando $\tilde{\theta} = \bar{\theta}$, conclui-se que

$$V(e) \geq \bar{V}(e) \quad , \quad \bar{V}(e) = e' C' P_{\bar{\theta}} C e + e' Q_{\bar{\theta}} e, \quad (6.16)$$

assim, se a condição (6.7) é satisfeita, a parcela à direita de (6.16) é positiva para todo $\bar{\theta} \in \Theta_m$, portanto define-se $\phi_1(e)$ como a seguinte função radialmente ilimitada.

$$\phi_1(e) = \min_{i \in \mathbb{I}_m} \lambda_{\min}(C' P_i C + Q_i) \|e\|^2. \quad (6.17)$$

Usando (6.5) com o fato que todos os parâmetros são limitados, define-se $\phi_2(e)$ como

$$\begin{aligned} \phi_2(e) = \max_{i \in \mathbb{I}_m} \left\{ \lambda_{\max}(C' P_i C) \|e\|^2 + 2 \|C\| \|S_i\| \|e\| \right\} + \\ + \lambda_{\max}(Q_{\bar{\theta}}) \|e\|^2 + 2 \|C\| \|S_{\bar{\theta}}\| \|e\|. \end{aligned}$$

Para mostrar que a condição (6.11) é satisfeita, as seguintes notações auxiliares são utilizadas: seja f_e o campo vetorial caracterizado pelo sistema chaveado (6.3), ou seja, $\dot{e}(t) = f_e(t)$ onde

$$\begin{aligned} f_e &= (A_{\bar{\theta}} - L_{\theta} C) e(t) - A_{\theta} z(t) - b_{\theta} + A_{\bar{\theta}} z(t) + b_{\bar{\theta}}, \\ &= (A_{\bar{\theta}} - L_{\theta} C) e(t) + A_z (\bar{\theta} - \theta) + B_a (\bar{\theta} - \theta). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Na expressão (6.18), usam-se as identidades $b_{\bar{\theta}} - b_{\theta} = B_a (\bar{\theta} - \theta)$ e $A_{\bar{\theta}} z - A_{\theta} z = A_z (\bar{\theta} - \theta)$ de acordo com a notação (6.9).

Com a notação (6.18), usando a derivada direcional na direção $h = f_e$, constrói-se a expressão (6.13) para o sistema (6.3). A primeira situação a ser considerada é quando $\sigma(\varepsilon)$ é um conjunto unitário no ponto “ ε ” em uma

região e a trajetória não deixa essa região nesse ponto. Nesse caso, $\sigma(\varepsilon) = \{i\}$ para algum $i \in \mathbb{I}_m$ e $\theta_i(x, z) = 1$, portanto $\theta_j(x, z) = 0$ para $j \notin \sigma(\varepsilon)$. Assim, escreve-se (6.13) como (6.19).

$$\mathbf{D}_h V(e) = \sum_{i=1}^m \theta_i(x, z) \nabla v_i(e) h, \quad h = f_e. \quad (6.19)$$

Outra situação de interesse é quanto $\sigma(\varepsilon)$ não é conjunto unitário em um ponto “ ε ” na superfície de chaveamento e a trajetória não deixa a superfície de chaveamento nesse ponto, ou seja $\sigma(\varepsilon)$ permanece constante durante um certo intervalo de tempo. Nesse caso, o movimento de modos deslizantes está ocorrendo e para todos os pontos da trajetória $\varepsilon(t)$ durante esse intervalo de tempo tem-se que:

$$\begin{cases} v_i(e) = v_j(e) = V(e) \\ \nabla v_i(e) h(t) = \nabla v_j(e) h(t) \end{cases}, \quad \forall i, j \in \sigma(\varepsilon(t)). \quad (6.20)$$

Em particular, como $\nabla v_i(e) h(t) = \nabla v_j(e) h(t)$, $\forall i, j \in \sigma(\varepsilon(t))$, e como $\theta_i(x, z) = 0$ para $i \notin \sigma(\varepsilon)$ pode-se também reescrever (6.13) como em (6.19).

A última situação a ser analisada é quando $\sigma(\varepsilon)$ muda. Essa situação pode ocorrer quando $\sigma(\varepsilon)$ não é conjunto unitário em um ponto “ ε ” da superfície de chaveamento e a trajetória deixa a superfície nesse ponto, ou quando $\sigma(\varepsilon)$ é unitário em um ponto “ ε ” de uma região e a trajetória deixa essa região nesse ponto. Nessas situações $\sigma(\varepsilon)$ muda e como por hipótese $\sigma(\varepsilon(t))$ é constante por partes, a trajetória se move para uma nova região ou superfície de chaveamento que se enquadra em uma das situações previamente discutidas, onde (6.19) é satisfeita. Esses pontos onde σ é descontínuo correspondem, portanto, a pontos isolados da trajetória do sistema. Assim conclui-se que (6.19) é válido para toda trajetória do sistema. Como $V(e)$ é localmente Lipschitz, tem-se que a derivada direcional e a derivada temporal coincidem em quase todo ponto, e $\mathbf{D}_h V(e) < 0$ garante o decrescimento de $V(e(t))$ mesmo para a trajetória do sistema movendo-se ao longo das linhas ou superfícies onde o gradiente de $V(e)$ não existe e portanto a expressão usual para a derivada temporal não pode ser usada. Detalhes sobre esse ponto foram discutidos na Seção 2.2 e encontram-se em (FILIPPOV, 1988, p. 155).

Observe que, a partir de (6.10) e (6.11), $V(e)$ é positiva definida e não crescente. Portanto a origem é um ponto de equilíbrio para o sistema de erro sempre que essas condições são satisfeitas. Nesse caso, as condições de convergência do teorema decorrem dos mesmos argumentos usados em (FILIPPOV, 1988, p. 155), isto é, convergência global para $x(t)$ com $z(t)$ confinado em \mathcal{X} .

Pelo exposto acima basta agora mostrar que a LMI (6.8) é uma condi-

ção suficiente para (6.11).

Como, em geral, $\theta(x, z)$ é uma função conjunto e de difícil caracterização, usa-se uma condição mais conservadora onde $\theta(x, z)$ é substituído por um parâmetro θ arbitrário e variante no tempo, assumindo valores no simplex unitário Θ_m . Para reduzir o conservadorismo associado a essa relaxação do problema será utilizado o *S-Procedure* na condição (6.16) e levando em conta a restrição $V(e) - \bar{V}(e) \geq 0$ de (6.16). Assim obtém-se

$$\mathbf{D}_h V(e) + \alpha (V(e) - \bar{V}(e)) < 0, \quad (6.21)$$

$\forall e \neq 0, \forall \bar{\theta}, \theta \in \Theta_m, \alpha > 0$ é um fator de escala dado¹.

Para mostrar que (6.8) implica (6.21), considere a seguinte função auxiliar

$$\begin{aligned} \Xi(e, \bar{\theta}, \theta, z) &= \sum_{i=1}^m \theta_i \nabla v_i(e) f_e + \alpha (V(e) - \bar{V}(e)), \\ &= 2(e' C' P_\theta - S'_\theta + S'_\theta) C e + 2e' Q_{\bar{\theta}} e + \\ &\quad - \alpha(e' C' (P_{\bar{\theta}} - P_\theta) C e + 2e' C' (S_{\bar{\theta}} - S_\theta)), \end{aligned} \quad (6.22)$$

e observe que $\Xi(e, \bar{\theta}, \theta, z)$ é a expressão à esquerda de (6.21).

Utilizando o Lema de Finsler, a condição (6.8) é equivalente a existência de um escalar τ , possivelmente uma função de $(\theta, \bar{\theta}, z)$, tal que

$$U = \Gamma + G_a C_a + C'_a G'_a + G_b C_b + C'_b G'_b + \tau \tilde{N}' \tilde{N} < 0. \quad (6.23)$$

Definem-se vetores auxiliares Υ , π e η como mostrado a seguir

$$\begin{aligned} \Upsilon &= \begin{bmatrix} e' & \pi' & \eta' & (\bar{\theta} - \theta)' \end{bmatrix}', \\ \pi &= (A_{\bar{\theta}} - L_\theta C) e, \\ \eta &= (A_{\bar{\theta}} - A_\theta) z + (b_{\bar{\theta}} - b_\theta). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Observando que $\tilde{N}' \Upsilon = 0$, $C_b \Upsilon = 0$ e $C_a \Upsilon = 0$, multiplicando a parcela à esquerda de (6.23) por Υ à direita e à esquerda por seu transposto, obtém-se

$$\begin{aligned} \Upsilon' U \Upsilon &= \Upsilon' \Gamma \Upsilon, \\ &= 2(e' C' P_\theta C + Q_{\bar{\theta}}) (\pi + \eta) + (\bar{\theta} - \theta)' \Phi(z) (\bar{\theta} - \theta) + \\ &\quad - 2(\bar{\theta} - \theta)' S C \pi - \alpha(e' C' (P_{\bar{\theta}} - P_\theta) C e + 2e' C' S (\bar{\theta} - \theta)), \\ &= \Xi(e, \bar{\theta}, \theta, z), \end{aligned} \quad (6.25)$$

para Υ , π e η obedecendo a estrutura (6.24).

Na expressão (6.25) utiliza-se a notação $S_{\bar{\theta}} - S_\theta = S(\bar{\theta} - \theta)$, $b_{\bar{\theta}} -$

$b_\theta = B_a (\bar{\theta} - \theta)$ e $A_{\bar{\theta}}z - A_\theta z = A_z (\bar{\theta} - \theta)$. A expressão (6.25) mostra que se (6.8) é satisfeita, então $\Xi(e, \bar{\theta}, \theta, z) < 0$.

Define-se, por fim, a seguinte constante positiva, baseada em (6.23).

$$\varepsilon_3 = \min_{\substack{\bar{\theta}, \theta \in \Theta_m, \\ z \in \mathcal{Z}}} \lambda_{\min}(-U). \quad (6.26)$$

É evidente, a partir de (6.24), que $\varepsilon_3 \|e\|^2 \leq \varepsilon_3 \|\Upsilon\|^2$, pois $\|\Upsilon\|^2 = \|e\|^2 + \|\pi\|^2 + \|\eta\|^2 + \|\bar{\theta} - \theta\|^2$ e, a partir de (6.26) e (6.23)

$$\Xi(e, \bar{\theta}, \theta, z) \leq -\varepsilon_3 \|e\|^2 \quad \forall e \in \mathbb{R}^n. \quad (6.27)$$

A partir de (6.19), (6.21), (6.22) e a direção $h = \dot{e} = f_e$ verifica-se que $\mathbf{D}_h V(e) \leq \Xi(e, \bar{\theta}, \theta, z)$. Isso mostra que a LMI (6.8) é uma condição suficiente para (6.21) e portanto para (6.11) com $\phi_3(e) = \varepsilon_3 \|e\|^2$, completando assim a prova. \square

Comentário 5. Para que o primeiro dos requisitos de convergência (5.6) seja verdadeiro, exige-se que o politopo \mathcal{Z} seja positivamente invariante para a dinâmica do observador (5.3). As condições LMI para que um dado politopo seja positivamente invariante podem ser obtidas em (TROFINO; DEZUO, 2014) e podem ser usadas para verificar esse requisito. Essa condição pode ser vista com uma condição de excitação persistente que é encontrada geralmente nos problemas de estimação de parâmetros. A vantagem da abordagem proposta é que essa condição é facilmente verificável em tempo real durante o experimento de estimação de parâmetros. Observa-se que as condições de excitação persistente que são encontradas em vários métodos de estimação de parâmetros são difíceis de serem verificadas (FARZA et al., 2009). Um ponto interessante dessa investigação é encontrar o melhor politopo e a entrada $r(t)$ que maximizem as chances de factibilidade das condições LMI. Nesse sentido, a função Φ em (6.9) exerce um papel importante. \blacksquare

Comentário 6. Os resultados do teorema são apresentados num contexto ideal de modos deslizantes onde a frequência de chaveamento é ilimitada e o observador chaveado depende do parâmetro $\theta(x, z)$ obtido de acordo com os resultados de Filippov. Em situações práticas, a frequência de chaveamento deve ser limitada e o parâmetro $\theta(x, z)$ é de difícil caracterização e não é possível obtê-lo computacionalmente em tempo real, porque, entre outras razões, o vetor x não está inteiramente disponível. Por essa razão, apresenta-se na sequência um procedimento para obter-se uma aproximação do parâmetro de combinação convexa de Filippov $\theta(x, z)$ que pode ser calculado em tempo real e pode ser aplicado no observador chaveado (5.3). A ideia é inspirada

na técnica PWM (*Pulse-Width Modulation* em inglês ou Modulação por Largura de Pulso) (SIRA-RAMIREZ, 1993) e consiste em limitar a frequência de chaveamento, mas mantê-la suficientemente alta comparada com as frequências associadas ao espectro de frequências dos subsistemas, de tal forma que o período de chaveamento esteja associado a escala de tempo onde o campo vetorial dos subsistemas seja praticamente constante no intervalo de tempo entre um chaveamento e outro. Para ilustrar essa ideia, suponha que $f_i(e(t))$ sejam funções contínuas, no sentido de Lipschitz, representando o campo vetorial de subsistemas e $f(e(t)) = \sum_{i=1}^m \theta_i(x(t), z(t)) f_i(e(t))$ é o campo vetorial do sistema chaveado, onde $\theta_i(x(t), z(t))$ é o parâmetro de combinação convexa definido de acordo com os resultados de Filippov. Considere a seguinte aproximação para a média móvel do campo vetorial:

$$f(e(t)) = \sum_{i=1}^m \theta_i(x(t), z(t)) f_i(e(t)) \cong \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \sum_{i=1}^m \rho_i(\sigma(\varepsilon(t))) f_i(e(t)) dt, \quad (6.28)$$

onde $T > 0$ é um intervalo de tempo suficientemente pequeno, o período de chaveamento é uma pequena fração de T , $\rho_i(\sigma(\varepsilon(t)))$ é uma variável lógica definida como

$$\rho_i(\sigma(\varepsilon(t))) = 1 \text{ para algum } i \in \sigma(\varepsilon(t)) \text{ , } \rho_j(\sigma(\varepsilon(t))) = 0 \text{ para } j \neq i, \quad (6.29)$$

atualizada nos instantes de chaveamento e mantida constante entre os intervalos de chaveamento, e $\sigma(\varepsilon(t))$ é a função constante por partes em (5.12). Como as funções $f_i(e(t))$ são Lipschitz, quanto mais T é reduzido, mais $f_i(e(t))$ se aproxima de um valor constante no intervalo de tempo, de forma que para T suficientemente pequeno podemos considerar $f(e(t))$ praticamente constante no intervalo $[t-T, t]$. Portanto, para um $T > 0$ suficientemente pequeno, a parcela à direita de (6.28) pode ser aproximada usando a seguinte expressão:

$$\frac{1}{T} \int_{t-T}^t \sum_{i=1}^m \rho_i(t) f_i(e(t)) dt \cong \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{T} \int_{t-T}^t \rho_i(\sigma(\varepsilon(t))) dt \right) f_i(e(t)), \quad (6.30)$$

que, por sua vez, origina a seguinte aproximação

$$\theta_i(x(t), z(t)) \cong \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \rho_i(\sigma(\varepsilon(t))) dt. \quad (6.31)$$

Observa-se que a aproximação indicada em (6.31) para os coeficientes de Filippov $\theta_i(x(t), z(t))$ podem ser computadas em tempo real a partir

da variável lógica $p_i(\sigma(\varepsilon(t)))$ em (6.29), que depende unicamente do sinal $\varepsilon(t)$, disponível em tempo real, e é constante no intervalo T . A aproximação (6.28) indica que o valor médio móvel, num intervalo T , da variável lógica $p_i(\sigma(\varepsilon(t)))$ é uma boa aproximação dos coeficientes de Filippov. Essa aproximação de média móvel é induzida pela aproximação da média móvel do campo vetorial ideal de Filippov $f(e(t))$ no mesmo intervalo de tempo. Note que essa noção de modelo para média móvel em (6.28), (6.31) é diferente dos modelos convencionais de PWM que são obtidos na condição de equilíbrio. ■

6.1 EXEMPLO NUMÉRICO

Nesse exemplo, para encontrar uma solução para as LMIs foi utilizado o *solver* SeDuMi com a interface YALMIP para o Matlab. As simulações foram realizadas com o Simulink para avaliar a resposta do sistema.

Considera-se o modelo de um motor de corrente contínua (CC) como mostrado em (6.32), baseado em (UTKIN; GULDNER; SHI, 2009).

$$\begin{bmatrix} \dot{I} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{\lambda_0}{L} \\ \frac{k_t}{J} & -\frac{B_f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \tau, \quad (6.32)$$

onde as variáveis de estado são a corrente $I(t)$ [A] e a rotação angular $\omega(t)$ [rad · s⁻¹]. Os parâmetros são a indutância L [H], a resistência R [Ω], o momento de inércia J [kgm²], a constante de torque k_t [NmA⁻¹], a constante da força contra-eletromotriz λ_0 [Vs · rad⁻¹] e o atrito viscoso B_f [Nms⁻¹]. Os sinais de entrada são a tensão $v(t)$ [V] (sinal de excitação) e o torque τ [Nm] (entrada constante).

Inicialmente, considere o problema de estimar as variáveis de estado e o valor da constante da força contra-eletromotriz $\lambda_0 \in \mathbf{Co}\{0, 1; 0, 3\}$, onde os demais parâmetros são dados como $R = 1\Omega$, $L = 0,1\text{H}$, $J = 0,05\text{kgm}^2$, $k_t = 1,2\text{NmA}^{-1}$, $B_f = 0,4\text{Nms}^{-1}$ e $\tau = 1,0\text{Nm}$. Supõe-se que a corrente está disponível para medição, ou seja, $y(t) = I(t)$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$. A resposta do sistema $y(t)$ foi gerada em simulação usando $\lambda_0 = 0,15$.

Na Fig. 8, as linhas tracejadas são as variáveis de estado do sistema e a linha sólida é o erro de saída $\varepsilon = y - Cz$. Nota-se que o erro de estimação converge para zero logo após 0.1s, durante o regime transitório da resposta do sistema que vai até 0.6s. Uma vez que o chaveamento influencia tanto a convergência paramétrica quanto a convergência das variáveis de estado, essa pode apresentar um ponto de descontinuidade em $\varepsilon = 0$. Esse ponto

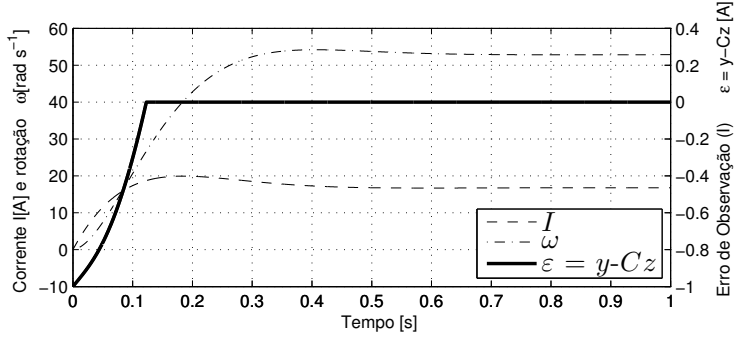


Figura 8 – Estado do sistema I e ω e o erro de saída $\varepsilon = x_1 - z_1$

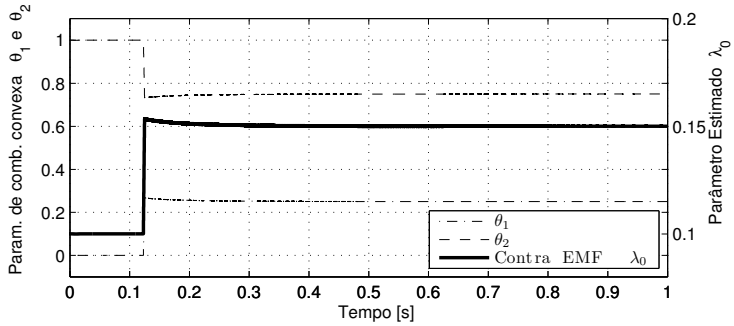


Figura 9 – Estimação do parâmetro λ_0

$\varepsilon = 0$ é caracterizado por uma superfície de chaveamento, como discutido no Comentário 4.

Na Fig. 9 é mostrada a estimação da constante da força contra-eletromotriz λ_0 . As linhas tracejadas são os parâmetros da combinação convexa θ_1 e θ_2 e o parâmetro $\hat{\lambda}_0$ é calculado como $\hat{\lambda}_0 = \theta_1 \lambda_{0,min} + \theta_2 \lambda_{0,max}$, onde $\lambda_{0,min}$ e $\lambda_{0,max}$ representam os valores mínimo e máximo do intervalo $\mathbf{Co}\{0, 1; 0, 3\}$. Os parâmetros de combinação convexa θ_1 e θ_2 são obtidos como descrito no Comentário 6. Assim que as variáveis de estado convergem para zero, ocorre o fenômeno de *sliding mode*, indicado pelo fato de ambos θ_1 e θ_2 estarem no intervalo aberto entre 0 e 1.

Utilizando o mesmo modelo, considere o problema de estimar as variáveis de estado e uma entrada desconhecida, correspondente a um distúrbio de torque constante por partes $\tau \in [1, 0; 2, 0]\text{Nm}$. Os demais parâmetros são

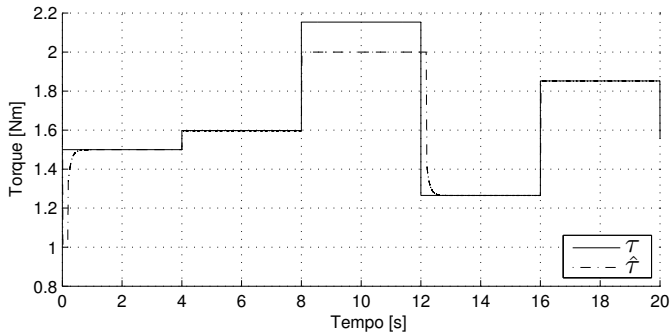


Figura 10 – Estimação da entrada de torque

os mesmos do experimento anterior. Para resolver esse problema, a rotação angular ω é medida diretamente, ou seja $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Na Fig. 10 é mostrada a estimativa da entrada de torque, que é calculada com $\hat{\tau} = \theta_1 \tau_{min} + \theta_2 \tau_{max}$, onde os parâmetros de combinação convexa θ_1 e θ_2 são obtidos como descrito no Comentário 6. Aplicou-se, propositalmente, uma entrada de torque fora da região de projeto do estimador, que é $\tau \notin [1, 0; 2, 0]$ Nm. Nota-se que quando essa entrada de torque está fora da região de projeto, que ocorre entre 8s e 12s, as condições LMI do problema não são mais satisfeitas e a estimativa falha, deixando de convergir para zero, vide a Fig. 11. Após 12s, a entrada de torque τ retorna ao intervalo de projeto. Após esse instante ocorre a convergência das variáveis de estado e posteriormente a convergência paramétrica.

Na Fig. 11, percebe-se que uma vez que ocorre convergência das variáveis de estado para seus valores correspondentes, a estimativa dos parâmetros é bastante rápida, vide os instantes 4s e 16s. nesses instantes, o tempo necessário para se conhecer o valor de estimativa depende apenas da aproximação dos parâmetros de combinação convexa θ_1 e θ_2 .

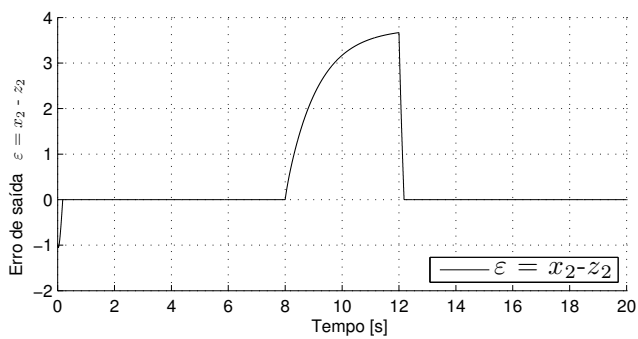


Figura 11 – Erro de estimação da entrada de torque

7 ESTIMAÇÃO DE ESTADOS E PARÂMETROS COM CUSTO GARANTIDO

Apresenta-se nesse capítulo uma extensão do resultado anterior para o projeto do observador chaveado descrito no Capítulo 5. No presente resultado incluem-se critérios de otimização que permitem ajustar a velocidade de convergência das variáveis de estado e dos parâmetros a estimar. Como no Capítulo 6, considera-se o sinal de entrada $r(t)$ conhecido, bem como a matriz B . Não considera-se que o sinal de entrada $r(t)$ afete diretamente a saída, ou seja $D \equiv \mathbf{0}$. O vetor de medidas é considerado simplesmente $\varepsilon(t) = y(t) - Cz(t)$, isto é $E_a = \mathbf{0}$ e $E_b = \mathbf{0}$.

Seja o seguinte sistema a ser estimado, como no Capítulo 5, reescrito aqui por conveniência.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + b + Br(t), \\ y(t) &= Cx(t).\end{aligned}\tag{7.1}$$

Seja o observador chaveado abaixo, semelhante ao apresentado em (5.3) com o termo adicional $Br(t)$.

$$\dot{z}(t) = A_\theta z(t) + b_\theta + L_\theta (y(t) - Cz(t)) + Br(t),\tag{7.2}$$

onde as matrizes A_θ , b_θ e L_θ utilizadas acima seguem a mesma notação (5.4).

Para o sistema (7.1) e a dinâmica do observador, define-se o erro de estimação das variáveis de estado como $e(t) = x(t) - z(t)$. A dinâmica do erro de observação é mostrada em (7.3), na qual uma vez que tem-se $r(t)$ e B conhecidos, esses termos são eliminados.

$$\dot{e}(t) = (A_{\bar{\theta}} - L_\theta C) e(t) + (A_{\bar{\theta}} - A_\theta) z(t) + (b_{\bar{\theta}} - b_\theta).\tag{7.3}$$

Nesse resultado apresenta-se uma abordagem por LMIs para o problema de projeto do ganho L_θ e da lei de chaveamento $\sigma(\varepsilon)$ do observador (7.2) com o critério de custo garantido, onde esse critério é definido em (7.4).

$$J = \min_{L_\theta, \sigma(\varepsilon)} \max_{\substack{e_0 \in \mathcal{E}_0, \\ \bar{\theta}, \theta \in \Theta_m}} \int_0^\infty \xi'(t) \xi(t) dt,\tag{7.4}$$

onde \mathcal{E}_0 representa um conjunto dado de condições iniciais $e_0 = x(0) - z(0)$

e $\xi(t)$ é a seguinte variável de performance:

$$\xi(t) = C_p e(t) + D_p(\bar{\theta} - \theta(x(t), z(t))), \quad (7.5)$$

onde C_p e D_p são matrizes de ponderação dadas.

Para esse resultado, utilizam-se as mesmas funções auxiliares do Capítulo 6, reescritas em (7.6).

$$v_i(e) = \varepsilon' P_i \varepsilon + 2\varepsilon' S_i - 2\varepsilon' S_{\bar{\theta}} + e' Q_{\bar{\theta}} e, \quad (7.6)$$

onde $S_{\bar{\theta}} \in \mathbb{R}^{n_e}$ e $Q_{\bar{\theta}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são definidas de forma semelhante à notação (5.2), $\varepsilon(t) = y(t) - Cz(t)$ e P_i , Q_i , S_i são matrizes a serem determinadas.

Para mostrar as condições de convergência (5.6), propõe-se uma função candidata a Lyapunov baseada na função *max* de um conjunto de funções quadráticas auxiliares (7.6), como mostrado em (7.7).

$$\begin{aligned} V(e) &= \max_{i \in \mathbb{I}_m} \{v_i(e)\}, \\ &= \max_{i \in \mathbb{I}_m} \{e' C' P_i C e + 2e' C' S_i\} - 2e' C' S_{\bar{\theta}} + e' Q_{\bar{\theta}} e. \end{aligned} \quad (7.7)$$

As funções auxiliares $v_i(e)$ são continuamente diferenciáveis e portanto $V(e)$ é localmente Lipschitz contínua, mas não é diferenciável em todo ponto, por isso será dedicada uma atenção especial para mostrar o decréscimo de $V(e)$ utilizando a derivada direcional. Além disso, de (5.12) e (7.7) conclui-se que, como $V(e)$ é o máximo de um conjunto de funções e que $\sigma(\varepsilon)$ é o *argmax* do mesmo conjunto de funções, para todos os elementos i em $\sigma(\varepsilon)$ temos $V(e) = v_i(e)$ e $\theta_i(x, z) \in (0, 1)$. Para $i \notin \sigma(\varepsilon)$ teremos $\theta_i(x, z) = 0$ e $V(e) > v_i(e)$. Isso permite representar $V(e)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} V(e) &= \max_{i \in \mathbb{I}_m} \{v_i(e)\} \\ &= \sum_{i \in \sigma} \theta_i v_i(e) = \sum_{i=1}^m \theta_i v_i(e) \\ &= e' C' P_{\bar{\theta}} C e + 2e' C' (S_{\theta} - S_{\bar{\theta}}) + e' Q_{\bar{\theta}} e, \end{aligned} \quad (7.8)$$

onde $P_{\bar{\theta}}$, S_{θ} , $S_{\bar{\theta}}$, e $Q_{\bar{\theta}}$ foram anteriormente definidos.

Antes do resultado principal, que estabelece as condições suficientes para a convergência de (5.6), algumas notações auxiliares são introduzidas.

Seja $\alpha > 0$ um escalar positivo dado, tal que $T'A_i T + \frac{\alpha}{2} I_{n_c}$ seja Hurwitz¹

¹Como suposição, a matriz A_{θ} do sistema é Hurwitz $\forall \theta \in \Theta_m$. Em particular, A_i deve ser Hurwitz $\forall i \in \mathbb{I}_m$ e portanto sempre existe um $\alpha > 0$ tal que $T'A_i T + \frac{\alpha}{2} I_{n_c}$ seja Hurwitz $\forall i \in \mathbb{I}_m$.

$\forall i \in \mathbb{I}_m$ onde $T : T'T = I_{n_c}$, $CT = 0$ é uma base ortonormal para o espaço nulo de C . Seja $\mathfrak{K}_\theta : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^{r \times m}$ um anulador linear de θ , como descrito no Capítulo 2.3, ou seja, \mathfrak{K}_θ é uma função linear tal que $\mathfrak{K}_\theta \theta = 0, \forall \theta \in \Theta_m$, sejam \mathcal{Z} e \mathcal{E}_0 politopos dados. Define-se $e_a = [e'(0) \ 1]'$ e seu anulador linear \mathfrak{K}_{e_a} .

Considere as seguintes LMIs:

$$\Psi + \langle G_c \mathfrak{K}_{e_a} \rangle \geq 0, \quad \forall e(0) \in \mathcal{E}_0 \quad (7.9)$$

$$C' P_i C + Q_i > 0, \quad \forall i \in \mathbb{I}_m \quad (7.10)$$

$$N' (\Gamma_d + \langle G_d C_d \rangle) N < 0, \quad \forall z \in \mathcal{Z}, \forall \bar{\theta}, \theta \in \Theta_m \quad (7.11)$$

onde

$$\begin{aligned} \Psi &= \begin{bmatrix} -C' P_\theta C - Q_{\bar{\theta}} & \star \\ S'_{\bar{\theta}} C - S'_\theta C & \gamma \end{bmatrix}, \\ \Gamma_d &= \begin{bmatrix} \Gamma + \langle G_a C_a \rangle & \star \\ 0_{m(3n+m) \times 3n+m} & I_m \otimes (\Gamma + \langle G_a C_a \rangle) \end{bmatrix}, \\ \Gamma &= \begin{bmatrix} \alpha C' (P_\theta - P_{\bar{\theta}}) C + C'_p C_p & \star & \star & \star \\ C' P_\theta C + Q_{\bar{\theta}} & \mathbf{0}_n & \star & \star \\ C' P_{\bar{\theta}} C + Q_{\bar{\theta}} & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \star \\ -\alpha S' C + D'_p C_p & -S' C & \mathbf{0}_{m \times n} & \Phi \end{bmatrix}, \\ \Phi &= -\langle S' C (A_z + B) \rangle + D'_p D_p, \\ C_a &= [GA_{\bar{\theta}} - H_\theta C \quad -G \quad \mathbf{0}_n \quad \mathbf{0}_{n \times m}], \\ C_b &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & -I_n & A_z + B_a \\ \mathbf{0}_{r \times n} & \mathbf{0}_{r \times n} & \mathbf{0}_{r \times n} & \mathfrak{K}_{\bar{\theta} - \theta} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7.12)$$

Essa escolha de α não é ótima para o problema e é inspirada em (TROFINO et al., 2011a, Remark 1). A melhor escolha de α pode ser obtida usando a técnica de malha (*gridding*).

$$\begin{aligned}
C_d &= \begin{bmatrix} \bar{\theta} \otimes I_{3n+m} & -I_{m(3n+m)} \\ \mathbf{0}_{r(3n+m) \times 3n+m} & \mathfrak{K}_{\bar{\theta}} \otimes I_{3n+m} \\ C_b & \mathbf{0}_{n+r \times m(3n+m)} \\ \mathbf{0}_{m(n+r) \times 3n+m} & I_m \otimes C_b \end{bmatrix}, \\
\tilde{N} &= \begin{bmatrix} -I_{3n+m} & I_{3n+m} & \dots & I_{3n+m} \\ \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0}_{1 \times 3n} & \mathbf{1}_{1 \times m} \end{array} \right] & \mathbf{0}_{1 \times m(3n+m)} & & \\ \mathbf{0}_{m \times 3n+m} & I_m \otimes \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0}_{1 \times 3n} & \mathbf{1}_{1 \times m} \end{array} \right] & & \end{bmatrix}, \\
N &= \text{null}(\tilde{N}), \\
G_a &= \begin{bmatrix} I_n & I_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times m} \end{bmatrix}', \\
A_z &= \begin{bmatrix} A_1 z & A_2 z & \dots & A_m z \end{bmatrix}, \\
B_a &= \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

As variáveis de decisão para o problema LMI (7.9), (7.10) e (7.11) são $P_i, Q_i, H_i, S_i, G, G_c, G_d$ e γ com as seguintes dimensões:

$$\begin{aligned}
P_\theta &= P'_\theta = \sum_{i=1}^m \theta_i P_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}, & G &\in \mathbb{R}^{n \times n}, \\
Q_{\bar{\theta}} &= Q'_{\bar{\theta}} = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, & G_c &\in \mathbb{R}^{n+1 \times r_1}, \\
S &= \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_y \times m}, & \gamma &\in \mathbb{R}, \\
H_\theta &= \sum_{i=1}^m \theta_i H_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n}, \\
G_d &\in \mathbb{R}^{(m+1)(3n+m) \times (m+r)(3n+m)}.
\end{aligned}$$

Considerando a lei de chaveamento (5.12) e as notações mostradas acima, apresenta-se o seguinte teorema.

Teorema 8. *Assuma que o sistema (5.1) apresenta a matriz A Hurwitz e satisfaz a decomposição (5.2). Sejam \mathcal{Z} e \mathcal{E}_0 politopos dados e suponha que \mathcal{Z} é positivamente invariante para o sistema (5.3) com $z(0) \in \mathcal{Z}$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}^+$, suponha que existam matrizes $P_i, Q_i, S_i, H_i, i \in \mathbb{I}_m, G_c, G_d$ e G que satisfaçam as condições LMI (7.9), (7.10) e (7.11) onde γ é minimizado. Defina os ganhos do observador como $L_\theta = G^{-1}H_\theta$. Então, γ é um limitante superior para o custo garantido (7.4) e o observador chaveado (7.2) com a lei de chaveamento (5.12) satisfaz a condição de convergência do erro (5.6), $\forall x(t) \in \mathbb{R}^n$ com $z(t) \in \mathcal{Z}, \forall t \geq 0$. Além disso (7.7) é uma função de Lyapunov*

para o sistema (7.3).

Prova: A prova se assemelha bastante com a prova do teorema 7 e consiste em mostrar que se as LMIs (7.9)-(7.11) são satisfeitas, então a função localmente Lipschitz (6.5) satisfaz as seguintes condições

$$\phi_1(e) \leq V(e) \leq \phi_2(e), \quad (7.13)$$

$$\mathbf{D}_h V(e) \leq -\phi_3(e), \quad (7.14)$$

$$\int_0^\infty \xi'(t) \xi(t) dt \leq \gamma, \quad \forall e_0 \in \mathcal{E}_0, \bar{\theta}, \theta \in \Theta_m, \quad (7.15)$$

onde $\phi_1(e)$, $\phi_2(e)$, e $\phi_3(e)$, são funções contínuas positivas definidas, $\mathbf{D}_h V(e)$ é a derivada direcional unilateral de V na direção $h = e$ dado por (7.16).

$$\mathbf{D}_h V(e) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{V(e + \varepsilon h) - V(e)}{\varepsilon} = \max_{i \in \sigma(e)} \nabla v_i(e) h, \quad (7.16)$$

onde $\nabla v_i(e)$ é um vetor linha que indica o gradiente de $v_i(e)$ (LASDON, 1970, p. 420).

De forma semelhante à prova do Teorema 7, os principais argumentos usados são os seguintes:

- i. As condições (7.13) e (7.14) implicam que V é positiva definida e sua derivada negativa definida, e portanto $V(e)$ decresce;
- ii. Uma vez que $\phi_1(e) \leq V(e)$ conclui-se que $\phi_1(e)$ decresce levando assintoticamente a estimação do erro $e(t)$ para zero;
- iii. A convergência $\lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{\theta} - \theta(x, z)) = 0$ segue do fato que $V(e)$ é positiva definida e a expressão (7.14) é negativa definida nas variáveis $(e, \bar{\theta} - \theta(x, z))$. Isso implica que $\bar{\theta} - \theta(x, z) = 0$ é uma condição necessária para obter-se $V(e) = 0$, caso contrário $V(e)$ iria decrescer a partir de zero tornando-se negativa, o que contradiz a condição de positividade definida de V ;
- iv. Em (5.11), $v_i(e)$ são funções contínuas diferenciáveis, e portanto $V(e)$ em (6.5) é uma função localmente Lipschitz contínua. Isso implica que, em particular, a derivada direcional e a derivada temporal coincidem em quase todo ponto, levando a inequação $\frac{d}{dt} V(e) < 0$ a ser satisfeita em quase todo tempo, no sentido da medida de Lebesgue;
- v. Por fim, são mostrados como os requisitos de performance indicados em (7.15) são obtidos a partir de (7.39).

Os detalhes da prova são dados a seguir.

Para V em (7.7) segue a partir de (7.16) que

$$\mathbf{D}_h V(e) := \max_{i \in \sigma(\varepsilon)} \nabla v_i(e) h, \quad (7.17)$$

onde o gradiente é um vetor linha definido como:

$$\nabla v_i(e) = \frac{\partial v_i(e)}{\partial e}. \quad (7.18)$$

Inicialmente, será demonstrado que a condição (7.13) é satisfeita. Para isso, verifica-se que para um dado elemento arbitrário $\bar{\theta} \in \Theta_m$ a seguinte relação é verdadeira:

$$V(e) \geq e' C' P_{\bar{\theta}} C e + 2e' C' (S_{\bar{\theta}} - S_{\bar{\theta}}) + e' Q_{\bar{\theta}} e. \quad (7.19)$$

Isso é verdade para qualquer $\bar{\theta} \in \Theta_m$, porque $V(e)$ é o máximo elemento de um conjunto de funções e a parcela à direita de (7.19) é uma combinação convexa particular dos elementos desse conjunto. Em especial, quando $\bar{\theta} = \bar{\theta}$, conclui-se que

$$V(e) \geq \bar{V}(e) \quad , \quad \bar{V}(e) = e' C' P_{\bar{\theta}} C e + e' Q_{\bar{\theta}} e, \quad (7.20)$$

assim, se a condição (7.10) é satisfeita, a parcela à direita de (7.20) é positiva para todo $\bar{\theta} \in \Theta_m$, portanto define-se $\phi_1(e)$ a seguinte função radialmente ilimitada.

$$\phi_1(e) = \min_{i \in \mathbb{I}_m} \lambda_{\min}(C' P_i C + Q_i) \|e\|^2. \quad (7.21)$$

Usando (7.7) com o fato que todos os parâmetros serem limitados, define-se $\phi_2(e)$ como

$$\begin{aligned} \phi_2(e) = \max_{i \in \mathbb{I}_m} \left\{ \lambda_{\max}(C' P_i C) \|e\|^2 + 2 \|C\| \|S_i\| \|e\| \right\} + \\ + \lambda_{\max}(Q_{\bar{\theta}}) \|e\|^2 + 2 \|C\| \|S_{\bar{\theta}}\| \|e\|. \end{aligned}$$

Para mostrar que a condição (7.14) é satisfeita, as seguintes notações auxiliares são utilizadas: seja f_e o campo vetorial caracterizado pelo sistema chaveado (7.3), ou seja, $\dot{e}(t) = f_e(t)$ onde

$$\begin{aligned} f_e &= (A_{\bar{\theta}} - L_{\theta} C) e(t) - A_{\theta} z(t) - b_{\theta} + A_{\bar{\theta}} z(t) + b_{\bar{\theta}}, \\ &= (A_{\bar{\theta}} - L_{\theta} C) e(t) + A_z (\bar{\theta} - \theta) + B_a (\bar{\theta} - \theta). \end{aligned} \quad (7.22)$$

Na expressão (7.22), usam-se as identidades $b_{\bar{\theta}} - b_{\theta} = B_a(\bar{\theta} - \theta)$ e $A_{\bar{\theta}}z - A_{\theta}z = A_z(\bar{\theta} - \theta)$ de acordo com a notação (7.12).

Com a notação (7.22), usando a derivada direcional na direção $h = f_e$, constrói-se a expressão (7.17) para o sistema (7.3). A primeira situação a ser considerada é quando $\sigma(\varepsilon)$ é um conjunto unitário no ponto “ ε ” em uma região e a trajetória não deixa essa região nesse ponto. Nesse caso, $\sigma(\varepsilon) = \{i\}$ para algum $i \in \mathbb{I}_m$ e $\theta_i(x, z) = 1$, portanto $\theta_j(x, z) = 0$ para $j \notin \sigma(\varepsilon)$. Assim escreve-se (7.17) como

$$\mathbf{D}_h V(e) = \sum_{i=1}^m \theta_i(x, z) \nabla v_i(e) h, \quad h = f_e. \quad (7.23)$$

Outra situação de interesse é quanto $\sigma(\varepsilon)$ não é conjunto unitário em um ponto “ ε ” na superfície de chaveamento e a trajetória não deixa a superfície de chaveamento nesse ponto, ou seja $\sigma(\varepsilon)$ permanece constante durante um certo intervalo de tempo. Nesse caso o movimento de modos deslizantes está ocorrendo e para todos os pontos da trajetória $\varepsilon(t)$ durante esse intervalo de tempo tem-se que:

$$\begin{cases} v_i(e) = v_j(e) = V(e) \\ \nabla v_i(e) h(t) = \nabla v_j(e) h(t) \end{cases}, \quad \forall i, j \in \sigma(\varepsilon(t)). \quad (7.24)$$

Em particular, como $\nabla v_i(e) h(t) = \nabla v_j(e) h(t)$ e como $\theta_i(x, z) = 0$ para $i \notin \sigma(\varepsilon)$ pode-se também reescrever (7.17) como em (7.23).

A última situação a ser analisada é quando $\sigma(\varepsilon)$ muda. Essa situação pode ocorrer quando $\sigma(\varepsilon)$ não é conjunto unitário em um ponto “ ε ” da superfície de chaveamento e a trajetória deixa a superfície nesse ponto, ou quando $\sigma(\varepsilon)$ é conjunto unitário em um ponto “ ε ” de uma região e a trajetória deixa essa região nesse ponto. Nessas situações $\sigma(\varepsilon)$ muda e como $\sigma(\varepsilon(t))$ é constante por partes, a trajetória se move para uma nova região, ou superfície de chaveamento, onde (7.23) é satisfeita, como discutido anteriormente. Esses pontos onde σ é descontínuo correspondem, portanto, a pontos isolados da trajetória do sistema. Observa-se que $V(e)$ em (7.7) é localmente Lipschitz contínua, assim conclui-se que $V(e(t))$ decresce ao longo de toda trajetória do sistema $e(t)$, desde que o decrescimento onde (7.23) é válido esteja garantido. Como $V(e)$ é localmente Lipschitz, tem-se que a derivada direcional e a derivada temporal coincidem em quase toda ponto, e $\mathbf{D}_h V(e) < 0$ garante o decrescimento de $V(e(t))$ mesmo para a trajetória do sistema movendo-se ao longo das linhas ou superfícies onde o gradiente de $V(e)$ não existe e portanto a expressão usual para a derivada temporal não pode ser usada. Detalhes sobre esse ponto foram discutidos na Seção 2.2 e encontram-se em (FILIPPOV, 1988, p. 155).

Observe que, a partir de (7.13) e (7.14), $V(e)$ é positiva definida e não crescente. Portanto a origem é um ponto de equilíbrio para o sistema de erro sempre que essas condições são satisfeitas. Nesse caso, as condições de convergência do teorema decorrem dos mesmos argumentos usados em (FILIPPOV, 1988, p. 155), isto é, convergência global para $x(t)$ com $z(t)$ confinado em \mathcal{X} .

Como, em geral, $\theta(x, z)$ é uma função conjunto de difícil caracterização, usa-se uma condição mais conservadora onde $\theta(x, z)$ é substituído por um parâmetro θ arbitrário e variante no tempo, assumindo valores no simplex unitário Θ_m . Para reduzir o conservadorismo associado a essa relaxação do problema será utilizado o *S-Procedure* na condição (7.20) e levando em conta a restrição $V(e) - \bar{V}(e) \geq 0$. Assim obtém-se

$$\mathbf{D}_h V(e) + \alpha (V(e) - \bar{V}(e)) < 0, \quad (7.25)$$

$\forall e \neq 0, \forall \bar{\theta}, \theta \in \Theta_m, \alpha > 0$ é um fator de escalar dado¹.

Para mostrar que (7.25) é satisfeita, inicialmente será mostrada a relação entre a parcela à esquerda de (7.25) e a condição (7.11). Assim é construída uma função positiva definida $\phi_3(e)$ baseada na condição (7.11) que prova o decaimento de $V(e)$.

A seguir, considere a seguinte função auxiliar

$$\Xi(e(t), \bar{\theta}, \theta, z) = \sum_{i=1}^m \theta_i \nabla v_i(e(t)) f_{\theta} + \alpha (V(e) - \bar{V}(e)) + \xi' \xi, \quad (7.26)$$

$$= 2(e' C' P_{\bar{\theta}} - S'_{\bar{\theta}} + S'_{\theta}) C \dot{e} + 2e' Q_{\bar{\theta}} \dot{e} + e' C'_p C_p e + \quad (7.27)$$

$$- \alpha (e' C' (P_{\bar{\theta}} - P_{\theta}) C e + 2e' C' (S_{\bar{\theta}} - S_{\theta})) + \quad (7.28)$$

$$+ (\bar{\theta} - \theta)' D'_p D_p (\bar{\theta} - \theta) + 2e' C'_p D_p (\bar{\theta} - \theta), \quad (7.29)$$

e observe que $\Xi(e, \bar{\theta}, \theta, z)$ é a expressão à esquerda de (7.25) com o termo adicional $\xi' \xi$ introduzido para levar em conta o critério de performance.

Utilizando o Lema de Finsler, a condição (7.11) é equivalente à existência de um escalar τ , possivelmente uma função de $(\theta, \bar{\theta}, z)$, tal que

$$U = \Gamma_d + G_d C_d + C'_d G'_d + \tau \tilde{N}' \tilde{N} < 0. \quad (7.30)$$

Definindo vetores auxiliares μ_a, μ, π e η como mostrado a seguir

$$\begin{aligned} \mu_a &= [\mu' \quad \bar{\theta}_1 \mu' \quad \bar{\theta}_2 \mu' \quad \dots \quad \bar{\theta}_m \mu']', \\ \mu &= [e' \quad \pi' \quad \eta' \quad (\bar{\theta} - \theta)']', \\ \pi &= (A_{\bar{\theta}} - L_{\theta} C) e(t), \\ \eta &= (A_{\bar{\theta}} - A_{\theta}) z(t) + (b_{\bar{\theta}} - b_{\theta}). \end{aligned} \quad (7.31)$$

Observando que $\tilde{N}\mu_a = 0$ e $C_d\mu_a = 0$, $\bar{\theta}_i$ são escalares e, além disso, $C_b\mu = 0$, ao multiplicar-se parcela à esquerda de (7.30) por μ_a à direita e à esquerda por seu transposto, obtém-se

$$\mu'_a U \mu_a = \mu'_a \Gamma_d \mu_a = \mu' \Gamma \mu (1 + \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i^2) < 0. \quad (7.32)$$

Uma vez que $(1 + \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i^2) > 0$, a expressão acima implica que $\mu' \Gamma \mu < 0$. Além disso, como $C_a \mu = 0$ obtém-se

$$\begin{aligned} \mu' \Gamma \mu &= 2(e' C' P_\theta C + Q_\theta)(\pi + \eta) + e' C'_p C_p e - 2(\bar{\theta} - \theta) S C \pi - \\ &\quad - (\bar{\theta} - \theta)' \Phi (\bar{\theta} - \theta) - \alpha(e' C' (P_{\bar{\theta}} - P_\theta) C e + 2e' C' S (\bar{\theta} - \theta)), \\ &= M(e, \bar{\theta}, \theta, z). \end{aligned} \quad (7.33)$$

Na expressão (7.33) utiliza-se a notação $S_{\bar{\theta}} - S_\theta = S(\bar{\theta} - \theta)$, $b_{\bar{\theta}} - b_\theta = B_a(\bar{\theta} - \theta)$ e $A_{\bar{\theta}} z - A_\theta z = A_z(\bar{\theta} - \theta)$. A expressão acima mostra que se (7.11) é satisfeita, então $\Xi(e, \bar{\theta}, \theta, z) < 0$.

Define-se, por fim, a seguinte constante positiva, baseadas em (7.30).

$$\varepsilon_3 = \min_{\substack{\bar{\theta}, \theta \in \Theta_m, \\ z \in \mathcal{Z}}} \lambda_{\min}(-U). \quad (7.34)$$

É evidente, a partir de (7.31) que $\varepsilon_3 \|e(t)\|^2 \leq \varepsilon_3 \|\mu\|^2 \leq \varepsilon_3 \|\mu_a\|^2$. A partir de (7.32), (7.33) e (7.34) tem-se que $\forall e(t) \in \mathbb{R}^n$,

$$(1 + \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i^2) \Xi(e(t), \bar{\theta}, \theta, z) \leq -\varepsilon_3 \|e(t)\|^2. \quad (7.35)$$

A partir de (7.23), (6.21), (7.26) e a direção $h = \dot{e} = f_\theta$ verifica-se que $\mathbf{D}_h V(e) \leq \Xi(e(t), \bar{\theta}, \theta, z)$. Isso mostra que a LMI (7.11) é uma condição suficiente para (7.25) e portanto para (7.14) como $\phi_3(e(t)) = \varepsilon_3(1 + \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i^2)^{-1} \|e(t)\|^2$. A seguir, mostram-se os requisitos de performance indicados em (7.15). Com essa finalidade, observa-se que, a partir de (7.26), a condição $\Xi(e(t), \bar{\theta}, \theta, z) < 0$ implica em (7.36)

$$\mathbf{D}_h V(e) + \alpha(V(e) - \bar{V}(e)) + \xi' \xi < 0. \quad (7.36)$$

Como $V(e)$ é localmente Lipschitz, $x(t)$ e $e(t)$ são trajetórias absolutamente contínuas e conclui-se que $V(e)$ é absolutamente contínuo. Por isso, para quase todo $t \in [0, \infty)$ verifica-se que a derivada temporal de $V(e(t))$

existe e

$$\mathbf{D}_h V(e(t)) = \frac{d}{dt} V(e(t)). \quad (7.37)$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(e(t)) - V(e(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{d}{ds} V(e(s), \bar{\theta}) ds. \quad (7.38)$$

Uma vez que $\lim_{t \rightarrow \infty} V(e(t)) = 0$, como mostrado em (7.13) e (7.14) e como $\alpha(V(e) - \bar{V}(e))$ é não negativo a partir de (7.20) conclui-se, a partir de (7.36),(7.37),(7.38) que

$$\int_0^\infty \xi'(t) \xi(t) dt \leq V(e(0)). \quad (7.39)$$

Observando que $\mathfrak{K}_{e_a} e_a = 0$, ao multiplicar a parcela à esquerda de (7.15) por e_a à esquerda e à direita por sua transposta, obtém-se

$$0 \leq e_a' \Psi e_a = e'(0) (-C' P_\theta C - Q_\theta) e(0) + 2e'(0) (S_\theta' C - S_\theta' C) + \gamma, \forall e(0) \in \mathcal{E}_0. \quad (7.40)$$

A expressão (7.40) pode ser reescrita como

$$V(e(0), \bar{\theta}) \leq \gamma, \quad \forall e(0) \in \mathcal{E}_0. \quad (7.41)$$

A partir de (7.20) obtém-se (7.15) de (7.39) e (7.41), completando a prova. \square

7.1 EXEMPLO NUMÉRICO

Nesse exemplo, para encontrar uma solução para as LMIs foi utilizado o *solver* SeDuMi com a interface YALMIP para o Matlab. As simulações foram realizadas com o Simulink para avaliar a resposta do sistema.

Considere o sistema mecânico mostrado na Fig. 12 onde os blocos possuem massa m_a e m_b , as constantes das molas são k_a e k_b e o movimento está sujeito a atrito viscoso com coeficientes b_a e b_b , respectivamente. Esse sistema pode ser representado como (5.1).

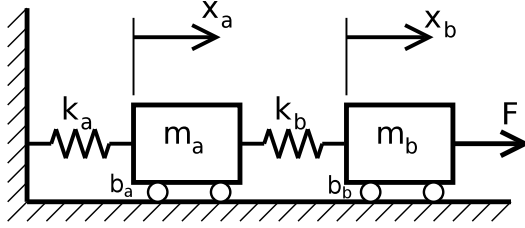


Figura 12 – Sistema de duas massas, mola e atrito viscoso

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \ddot{x}_a \\ \dot{x}_b \\ \ddot{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_a+k_b}{m_a} & -\frac{b_b}{m_a} & \frac{k_a}{m_a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_a}{m_b} & 0 & -\frac{k_a}{m_b} & -\frac{b_a}{m_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \dot{x}_a \\ x_b \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{F}{m_b} \end{bmatrix} \quad (7.42)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \dot{x}_a \\ x_b \\ \dot{x}_b \end{bmatrix}. \quad (7.43)$$

O vetor das variáveis de estado é $x = [x_a \ \dot{x}_a \ x_b \ \dot{x}_b]'$, sendo (x_a, x_b) as posições dos blocos em relação ao equilíbrio e as velocidades (\dot{x}_a, \dot{x}_b) . A força externa aplicada é $u = F_0 + F$, onde F é um desvio da força e F_0 é a força no equilíbrio. Supõe-se que as forças são constantes. O vetor de medição corresponde à posição e à velocidade do bloco b . As matrizes de ponderação para saída de performance foram escolhidas como $C_p = [I_4 \ 0_{4 \times 2}]'$ e $D_p = [0_{2 \times 4} \ 0_2]'$, isso é $\xi = e$.

O primeiro problema a ser considerado é encontrar a constante da mola k_a , dados os demais parâmetros. A única informação a ser usada sobre k_a é que $k_a \in \mathbf{Co}\{2,5; 3,5\}$. Os demais parâmetros usados são $k_b = 3$, $b_a = 3$, $b_b = 3$, $m_a = 3$, $m_b = 4$ e $F = 2$. As unidades estão no Sistema Internacional de Unidades.

Para a solução das LMIs (7.9), (7.10) e (7.11) usou-se $\alpha = 1$ e o politopo \mathcal{L} tal que $z_1 \in [0.3, 0.6]$, $z_2, z_4 \in [-0.1, 0.1]$ e $z_3 \in [1.0, 1.5]$. Para ilustrar o impacto do conjunto de condições iniciais no custo garantido, considera-se quatro politopos \mathcal{E}_0 diferentes. Os resultados das simulações são apresentados na Tabela 1 onde $e_i(0)$ denota os elementos do erro inicial $e(0)$ sendo $e(0) = x(0) - z(0)$. Para ilustrar o grau de conservadorismo no cálculo do custo garantido proposto através do teorema, utilizou-se a técnica de malha nas condições iniciais em \mathcal{E}_0 . Dessa forma obtém-se o ponto de pior performance em termos da energia da saída de performance $\|\xi(t)\|_2^2$ para cada

Tabela 1 – Índice do custo garantido

#	\mathcal{E}_0	γ	$\ \xi\ _2^2$	$\ \xi\ _2^2$ sem performance
1	$\{e_i(0) = -1\}$	2,282	1,999	8,012
2	$\{e_i(0) \in [-1, 0; 0, 0]\}$	6,443	2,933	8,012
3	$\{e_i(0) \in [-1, 0; 1, 0]\}$	8,582	4,796	8,366
4	$\{e_i(0) \in [-1, 5; 1, 5]\}$	18,36	10,82	18,82

condição inicial e_0 na malha durante a estimação de estado e parâmetro.

Para enfatizar o quanto a energia da saída de performance pode ser reduzida utilizando-se o custo garantido proposto no projeto da regra de chaveamento, indica-se também, na última coluna da tabela, a energia da saída de performance obtida com a mesma técnica de malha aplicado aos resultados do Capítulo 6, que não levam em conta nenhum critério de performance.

O sinal de medição foi obtido durante a simulação considerando o modelo verdadeiro com a constante de mola no valor nominal de $k_a = 3$. Nesse caso, a decomposição (5.2) resulta em $\bar{\theta} = [0,5 \quad 0,5]'$. Observa-se que na Tabela 1 os limites do custo garantido proposto pelo teorema e os obtidos por simulação são bastante próximos no caso 1. As diferenças nos casos 2, 3 e 4 podem ser reduzidas utilizando-se uma malha com mais pontos. Nesse exemplo, a malha foi obtida considerando uma precisão de 0,1 para cada componente e_i dentro dos politopos. O erro da estimação de saída obtida no caso 2, vide Tabela 1, é mostrado na Fig. 13. Lembrando que além da estimação de estados, é também estimado o parâmetro k_a . A convergência do erro de parâmetro para esse caso é mostrada na Fig. 14. Observa-se que a estimação do erro de saída é praticamente zero após 5 segundos, mas a estimação do parâmetro demora mais tempo para convergir para zero. A rápida convergência de ε é uma consequência da escolha das matrizes de ponderação C_p e D_p que resulta em $\xi = e$.

O segundo problema a ser considerado nesse exemplo é estimar uma entrada desconhecida, no caso a força F , dados os demais parâmetros. A única informação utilizada acerca de F é que $F \in \mathbf{Co}\{1,5; 2,5\}$. Os demais parâmetros são $k_a = 3$, $k_b = 2$, $b_a = 3$, $b_b = 3$, $m_a = 3$ e $m_b = 4$. As unidades estão no Sistema Internacional de Unidades.

Para a solução das LMIs (7.9), (7.10) e (7.11) usa-se o mesmo α e politopo \mathcal{Z} anteriores. O custo garantido foi obtido considerando os mesmos politopos \mathcal{E}_0 do caso 2 da Tabela 1. Os resultados das simulações são apresentados na Fig. 15 onde o parâmetro desconhecido é constante por partes no intervalo $F \in \mathbf{Co}\{1,5; 2,5\}$. Para ilustrar o impacto das matrizes

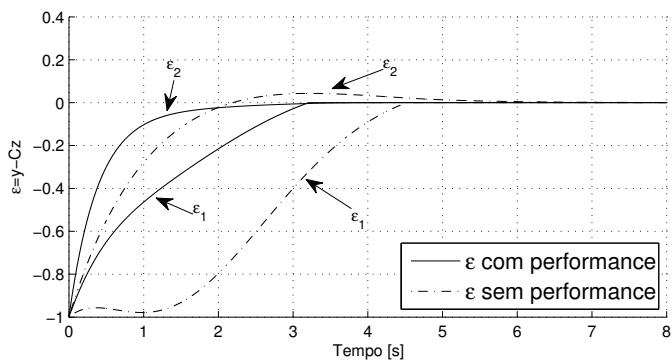


Figura 13 – Convergência do erro de saída com e sem o critério de custo garantido

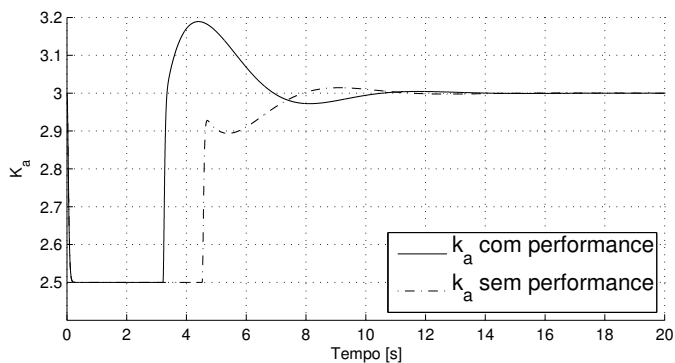


Figura 14 – Convergência do parâmetro com e sem o critério de custo garantido. $k_a = \theta_1 2,5 + \theta_2 3,5$.

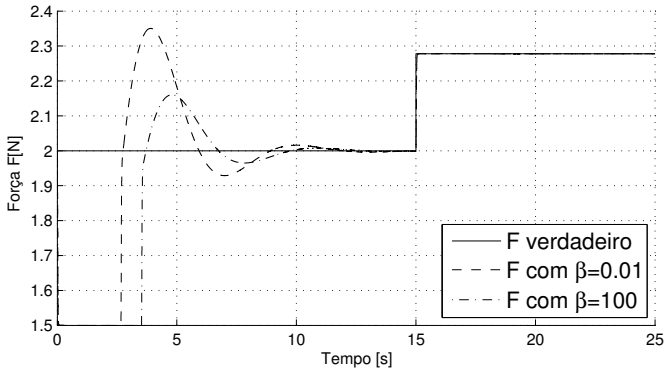


Figura 15 – Estimação da entrada desconhecida de força com e sem o critério de custo garantido. $F = \theta_1 1,5 + \theta_2 2,5$.

de ponderação que caracterizam a saída de performance, considera-se duas ponderações distintas para D_p e mesma C_p do caso anterior. No primeiro caso, utiliza-se uma ponderação pequena na estimação do parâmetro ao utilizar $D_p = [0_{2 \times 4} \beta I_2]'$ com $\beta = 0,01$ e uma ponderação grande no segundo caso com $\beta = 100$. Como esperado, tem-se uma convergência mais rápida do parâmetro no segundo caso. Nota-se que após o erro de saída $\varepsilon(t)$ convergir para zero, a entrada de força F calculada com (6.31) não depende mais da dinâmica do sistema.

A convergência das variáveis de estado e a convergência paramétrica estão intimamente conectadas através da lei de chaveamento, que seleciona os sistemas afins do observador, e o erro de estimação das variáveis que é utilizado para o chaveamento. Por essa razão não há um perfeito desacoplamento entre as duas convergências, de modo que as ponderações sempre agem tanto em uma convergência como em outra.

Finalmente, como mencionado no Comentário 5, uma característica interessante dessa proposta é que essa condição é facilmente verificável em tempo real. Se as condições de invariância positiva do politopo \mathcal{Z} são satisfeitas durante a execução do experimento, a convergência dos parâmetros é garantida. De fato, durante toda a simulação, essa condição de invariância foi satisfeita e portanto a convergência do erro de estimação do parâmetro é garantida, convergindo para zero.

8 ESTIMAÇÃO DE ESTADOS E PARÂMETROS COM PERFORMANCE H_∞

Apresenta-se nesse capítulo uma extensão dos resultados anteriores para o projeto do observador chaveado descrito no Capítulo 5. A extensão considera a inclusão de performance H_∞ bem como a inclusão de distúrbios tanto na equação de dinâmica quanto na saída. Assim, neste capítulo se considera o problema de atenuar os efeitos dos sinais externos e estimar estados e alguns parâmetros do sistema. Uma importante contribuição dos resultados aqui propostos é que as LMIs não dependem dos estados nem os resultados de condições de invariância positiva para a solução do problema. Quando as condições de convergência para a estimação de parâmetros não são satisfeitas, uma condição alternativa é proposta para resolver o problema da estimação de estados como um problema de projeto de um observador robusto.

Considere o seguinte sistema estável, como mostrado em (5.1) para um sinal de entrada $r(t) = w(t)$ desconhecido.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + b + Bw(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Dw(t),\end{aligned}\tag{8.1}$$

Assume-se que o vetor $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ é um sinal suave de distúrbio, mais precisamente, $w(t)$ é absolutamente contínuo¹, $w(t)$, $\dot{w}(t)$ são quadraticamente integráveis e $\lim_{t \rightarrow \infty} (w(t), \dot{w}(t)) = 0$. As matrizes B , C e D são matrizes conhecidas, as matrizes (A, b) são desconhecidas, mas pertencem a um politopo dado onde os vértices são (A_i, b_i) , como visto anteriormente em (5.2).

Utiliza-se o observador chaveado definido em (5.3), reescrito a seguir por conveniência, onde L_θ é o ganho do observador a ser determinado de modo que as condições de convergência (5.6) sejam satisfeitas.

$$\dot{z}(t) = A_\theta z(t) + b_\theta + L_\theta(y(t) - Cz(t)),\tag{8.2}$$

onde as matrizes A_θ , b_θ e L_θ utilizadas acima seguem a mesma notação de (5.4).

Como descrito na Seção 5, $E_a C \bar{x}$ é o vetor que especifica as componentes da saída medida $y(t)$ para as quais o equilíbrio é conhecido. O vetor $E_b \bar{x}$ contém as variáveis de estado para as quais seu equilíbrio é conhecido. $E_a \in \mathbb{R}^{n_a \times n_y}$ e $E_b \in \mathbb{R}^{n_b \times n}$ são matrizes dadas. Dessa forma, considera-se

¹O sinal $w(t)$ é absolutamente contínuo se $\dot{w}(t)$ existe em quase toda parte e $w(t) = w(0) + \int_0^t \dot{w}(\tau) d\tau$.

como em (5.7) que o sinal de erro abaixo é disponível em tempo real através do vetor de medidas $y(t)$ e da parte conhecida do equilíbrio \bar{x} .

$$\varepsilon(t) = \begin{bmatrix} y(t) - Cz(t) \\ E_a(y(t) - C\bar{x}) \\ E_b(z(t) - \bar{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_\varepsilon}, \quad n_\varepsilon = n_y + n_a + n_b, \quad (8.3)$$

A partir das variáveis de estado do sistema (8.1), a dinâmica do observador (8.2) e usando-se as decomposições de (5.2) e (5.4), define-se o erro de estimação de estados como $e(t) = x(t) - z(t)$, onde sua dinâmica é dado por (8.4).

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = (A_\theta - L_\theta C)e(t) + (A_{\bar{\theta}} - A_\theta)(x(t) - \bar{x}) + (A_{\bar{\theta}} - A_\theta)\bar{x} + \\ + b_{\bar{\theta}} - b_\theta + (B - L_\theta D)w(t). \end{aligned} \quad (8.4)$$

como descrito em (5.9), onde $w(t) = r(t)$ é um sinal de distúrbio desconhecido.

Observa-se que o sinal de medição $\varepsilon(t)$ em (8.3) pode ser representado como uma função de $e(t), x(t), w(t)$ de acordo com (5.10).

Para estimar $\bar{\theta}$ e as variáveis de estado do sistema com as propriedades de convergência (5.6), considere o seguinte conjunto de m funções auxiliares $v_i(\varepsilon, e, e_x, \bar{\theta})$ descritas em (5.11). Considere também a lei de chaveamento descrita em (5.12) no Capítulo 5.

Observe que apesar da dependência de v_i em relação a (e, e_x, w) e os parâmetros incertos \bar{x} e $\bar{\theta}$, a função de chaveamento σ é determinada *online* utilizando apenas ε e os parâmetros P_i e S_i que são calculados *offline*.

A fim de atenuar o impacto da perturbação nos requisitos de convergência (5.6), considera-se a seguinte saída de performance $\xi(t) \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ associada ao sistema de erro (8.4):

$$\xi(t) = C_p \pi(t) + D_p \eta(t) + E_p \dot{w}(t), \quad (8.5)$$

onde C_p, D_p e E_p são matrizes de ponderação dadas, onde C_p possui rank completo de colunas, $C_p' D_p = 0$ e $C_p' E_p = 0$. Os sinais auxiliares $\pi(t)$ e $\eta(t)$ são usados para representar a dinâmica do erro de estimação do sistema (8.4) na forma $\dot{e}(t) = \pi(t) + \eta(t)$ onde:

$$\begin{aligned} \pi &= (A_\theta - L_\theta C)e + (B - L_\theta D)w \\ \eta &= (A_{\bar{\theta}} - A_\theta)e_x + (A_{\bar{\theta}} - A_\theta)\bar{x} + b_{\bar{\theta}} - b_\theta \end{aligned} \quad (8.6)$$

Enquanto $\pi(t)$ está associando ao erro de estimação de estados $e(t)$ e o ganho do observador L_θ , $\eta(t)$ está associado ao erro de estimação de

parâmetros $A_{\bar{\theta}} - A_{\theta}$ e $b_{\bar{\theta}} - b_{\theta}$. O sinal auxiliar $w(t)$ é usado para representar o impacto do distúrbio $w(t)$ na taxa de variação da função de chaveamento (5.12). Observe que uma vez que o sinal de medição $y(t)$ está contaminado por ruído, $\varepsilon(t)$ também está.

A fim de minimizar os efeitos do distúrbio $w(t)$ na saída de performance $\xi(t)$, considera-se o seguinte requisito de atenuação de distúrbio:

$$\sup_{\substack{\|w_a(t)\|_2 \neq 0, \\ \bar{\theta}, \theta \in \Theta_m}} \frac{\|\xi(t)\|_2^2}{\|w_a(t)\|_2^2} < \gamma, \quad w_a(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

O índice (8.7) é definido para o sistema com as condições iniciais no equilíbrio, ou seja, $e(0) = 0$, $e_x(0) = 0$, $w(0) = 0$ com $\sigma(0)$ definido em (5.14). Essa é a hipótese usual para remover os efeitos das condições iniciais na resposta do sistema $\xi(t)$ e portanto evitar sua influência no índice de performance.

Para mostrar as condições de convergência (5.6), propõe-se uma função candidata a Lyapunov baseada na função max de um conjunto de funções quadráticas auxiliares (5.11) como mostrado abaixo.

$$\begin{aligned} V(e, e_x, w) &= \max_{i \in \mathbb{I}_m} \{v_i(e, e_x, w)\} \\ &= \max_{i \in \mathbb{I}_m} \{\varepsilon' P_i \varepsilon + 2\varepsilon' S_i\} - 2\varepsilon' S_{\bar{\theta}} + e' Q_{\bar{\theta}} e + e'_x M_{\bar{\theta}} e_x \end{aligned} \quad (8.8)$$

As funções auxiliares $v_i(e, e_x, w)$ são continuamente diferenciáveis e portanto $V(e, e_x, w)$ é localmente Lipschitz contínua, mas não é diferenciável em toda parte, por isso será dedicada uma atenção especial para mostrar o decrescimento de $V(e, e_x, w)$ utilizando a derivada direcional. Além disso, de (5.12) e (8.8) conclui-se que $V(e, e_x, w) = v_i(e, e_x, w) \quad \forall i \in \sigma(\varepsilon)$ e $\theta_i = 0$ se $i \notin \sigma(\varepsilon)$. Isso permite representar $V(e, e_x, w)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} V(e, e_x, w) &= \max_{i \in \mathbb{I}_m} \{v_i(e, e_x, w)\} \\ &= \sum_{i \in \sigma} \theta_i v_i(e, e_x, w) = \sum_{i=1}^m \theta_i v_i(e, e_x, w) \\ &= \varepsilon' P_{\theta} \varepsilon + 2\varepsilon' (S_{\theta} - S_{\bar{\theta}}) + e' Q_{\bar{\theta}} e + e'_x M_{\bar{\theta}} e_x \end{aligned} \quad (8.9)$$

onde P_{θ} , S_{θ} , $S_{\bar{\theta}}$, $Q_{\bar{\theta}}$ e $M_{\bar{\theta}}$ foram anteriormente definidos.

Antes do resultado principal, que estabelece condições suficientes para a convergência (5.6), introduz-se algumas notações auxiliares.

Seja $\alpha > 0$ um escalar positivo dado, tal que $T'A_iT + \frac{\alpha}{2}I_{n_c}$ seja Hurwitz² $\forall i \in \mathbb{I}_m$ onde $T : T'T = I_{n_c}$, $CT = 0$ é uma base ortonormal para o espaço nulo de C . Seja $\mathfrak{K}_\theta : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^{r \times m}$ um anulador linear de θ , como descrito no Capítulo 2.3, ou seja, \mathfrak{K}_θ é uma função linear tal que $\mathfrak{K}_\theta \theta = 0, \forall \theta \in \Theta_m$.

Considere o seguinte problema LMI onde as variáveis de decisão são $\gamma, P_i, Q_i, H_i, S_i, M_i, G, G_b$ e γ é minimizado,

$$Q_i > 0, \quad M_i > 0, \quad P_i > 0, \quad \gamma > 0, \quad \forall i \in \mathbb{I}_m \quad (8.10)$$

$$N' (\Gamma(\theta, \bar{\theta}) + \langle G_a C_a(\theta) + G_b(\theta, \bar{\theta}) C_b \rangle) N < 0, \quad \forall \bar{\theta}, \theta \in \Theta_m \quad (8.11)$$

onde

$$\Gamma(\theta, \bar{\theta}) = \langle \Gamma_a + \Gamma_b + \Gamma_c \rangle - \alpha \Gamma_d + \Gamma_e - \gamma \Gamma_f \quad (8.12)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_a &= \mathbf{F}'_a E' P_\theta E_1 \mathbf{F}_b - \mathbf{F}'_d S_a E_1 \mathbf{F}_b + \mathbf{F}'_c Q_{\bar{\theta}} \mathbf{F}_b, \\ \Gamma_b &= \mathbf{F}'_a E' P_\theta E_2 \mathbf{F}_f - \mathbf{F}'_d S_a E_2 \mathbf{F}_f + \mathbf{F}'_e M_{\bar{\theta}} \mathbf{F}_f, \\ \Gamma_c &= \mathbf{F}'_a E' P_\theta E_3 \mathbf{F}_g - \mathbf{F}'_d S_a E_3 \mathbf{F}_g, \\ \Gamma_d &= \mathbf{F}'_a E' P_{\bar{\theta}-\theta} E \mathbf{F}_a + \mathbf{F}'_a E' S_a \mathbf{F}_d + \mathbf{F}'_d S'_a E \mathbf{F}_a, \\ \Gamma_e &= \mathbf{F}'_h \mathbf{F}_h, \quad \Gamma_f = \mathbf{F}'_p \mathbf{F}_p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_a &= \begin{bmatrix} I_n & \mathbf{0}_{n \times 2n} & I_n & \mathbf{0}_{n \times n+2n_w+m+2nm} \end{bmatrix}', \\ C_a(\theta) &= \begin{bmatrix} \Psi_a & \mathbf{0}_{n \times 2n} & -G & \mathbf{0}_n & \Psi_b & \mathbf{0}_{n \times n_w+m+2nm} \end{bmatrix}, \\ \Psi_a &= GA_\theta - H_\theta C, \quad \Psi_b = GB - H_\theta D, \end{aligned}$$

²Como suposição, a matriz A_θ do sistema é Hurwitz $\forall \theta \in \Theta_m$. Em particular, A_i deve ser Hurwitz $\forall i \in \mathbb{I}_m$ e portanto sempre existe um $\alpha > 0$ tal que $T'A_iT + \frac{\alpha}{2}I_{n_c}$ seja Hurwitz $\forall i \in \mathbb{I}_m$. Essa escolha de α não é ótima para o problema e é inspirada em (TROFINO et al., 2011a, Remark 1). A melhor escolha de α pode ser obtida usando a técnica de malha (*gridding*).

$$\begin{aligned}
C_b &= [C_c' \ C_d' \ C_e']', \\
C_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & A_{\bar{\theta}} & -I_n & \mathbf{0}_{n \times 2n} & B & \mathbf{0}_{n \times n_w + m + 2nm} \end{bmatrix}, \\
C_d &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & A_{\bar{\theta} - \theta} & \mathbf{0}_{n \times 2n} & -I_n & \mathbf{0}_{n \times 2n_w} & B_a & A_a & \mathbf{0}_{n \times nm} \end{bmatrix}, \\
C_e &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{r \times 5n + 2n_w} & \mathfrak{K}(\bar{\theta} - \theta) & \mathbf{0}_{r \times nm} & \mathbf{0}_{r \times nm} \\ \mathbf{0}_{nm \times 5n + 2n_w} & \mathbf{0}_{nm \times m} & A_b & \mathbf{0}_{nm} \\ \mathbf{0}_{r_x m \times 5n + 2n_w} & \mathbf{0}_{r_x m \times m} & \mathbf{0}_{r_x m \times nm} & I_m \otimes \mathfrak{K}(b_{\bar{\theta}}) \\ \mathbf{0}_{nm \times 5n + 2n_w} & I_m \otimes b_{\bar{\theta}} & \mathbf{0}_{nm} & -I_{nm} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

e as seguintes matrizes constantes de estrutura

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_a &= \begin{bmatrix} I_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_{n \times 3n} & \mathbf{0}_{n \times n_w} & \mathbf{0}_{n \times n_w + m + 2nm} \\ \mathbf{0}_n & I_n & \mathbf{0}_{n \times 3n} & \mathbf{0}_{n \times n_w} & \mathbf{0}_{n \times n_w + m + 2nm} \\ \mathbf{0}_{n_w \times n} & \mathbf{0}_{n_w \times n} & \mathbf{0}_{n_w \times 3n} & I_{n_w} & \mathbf{0}_{n_w \times n_w + m + 2nm} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{F}_b &= [\mathbf{0}_{n \times 3n} \quad I_n \quad I_n \quad \mathbf{0}_{n \times 2n_w + m + 2nm}], \\
\mathbf{F}_c &= [I_n \quad \mathbf{0}_{n \times 4n + 2n_w + m + 2nm}], \\
\mathbf{F}_d &= [\mathbf{0}_{m \times 5n + 2n_w} \quad I_m \quad \mathbf{0}_{m \times 2nm}], \\
\mathbf{F}_e &= [\mathbf{0}_n \quad I_n \quad \mathbf{0}_{n \times 3n + 2n_w + m + 2nm}], \\
\mathbf{F}_f &= [\mathbf{0}_{n \times 2n} \quad I_n \quad \mathbf{0}_{n \times 2n + 2n_w + m + 2nm}], \\
\mathbf{F}_g &= [\mathbf{0}_{n_w \times 5n + n_w} \quad I_{n_w} \quad \mathbf{0}_{n_w \times m + 2nm}], \\
\mathbf{F}_h &= [\mathbf{0}_{n_\xi \times 3n} \quad C_p \quad D_p \quad \mathbf{0}_{n_\xi \times n_w} \quad E_p \quad \mathbf{0}_{n_\xi \times m + 2nm}], \\
\mathbf{F}_p &= [\mathbf{0}_{2n_w \times 5n} \quad I_{2n_w} \quad \mathbf{0}_{2n_w \times m + 2nm}],
\end{aligned} \tag{8.13}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{N} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 5n + 2n_w} & \mathbf{1}_{1 \times m} & \mathbf{0}_{1 \times nm} & \mathbf{0}_{1 \times nm} \\ \mathbf{0}_{n \times 5n + 2n_w} & \mathbf{0}_{n \times m} & \mathbf{1}_{1 \times m} \otimes I_n & \mathbf{0}_{n \times nm} \\ \mathbf{0}_{m \times 5n + 2n_w} & \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_{m \times nm} & \mathbf{1}_{1 \times m} \otimes I_n \end{bmatrix}, \\
N &= \text{null}(\tilde{N}).
\end{aligned}$$

As variáveis de decisão do problema LMI (8.10) e (8.11) possuem as

seguintes dimensões:

$$\begin{aligned}
 P_\theta &= P'_\theta = \sum_{i=1}^m \theta_i P_i \in \mathbb{R}^{n_\varepsilon \times n_\varepsilon}, \\
 S &= \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_\varepsilon \times m}, \\
 Q_{\bar{\theta}} &= Q'_{\bar{\theta}} = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\
 H_\theta &= \sum_{i=1}^m \theta_i H_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n}, \quad G \in \mathbb{R}^{n \times n} \\
 M_{\bar{\theta}} &= \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i M_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \gamma \in \mathbb{R} \\
 G_b &\in \mathbb{R}^{(5n+2n_w+m+2nm) \times (2n+r+2nm+r_x n)},
 \end{aligned}$$

Considerando a lei de chaveamento (5.12) e a notação acima, o resultado principal é apresentado pelo seguinte teorema.

Teorema 9. *Assuma que o sistema (8.1) apresenta a matriz A Hurwitz e satisfaz a decomposição (5.2). Dado $\alpha \in \mathbb{R}^+$, suponha que existem matrizes P_i , Q_i , S_i , H_i , M_i , $i \in \mathbb{I}_m$, G_b e G que satisfaçam as condições LMI (8.10) e (8.11), onde γ é minimizado. Defina os ganhos do observador $L_\theta = G^{-1}H_\theta$. Então, o observador chaveado (5.3) com a lei de chaveamento (5.12) possui estados limitados e satisfaz as condições de convergência global do erro em (5.6), $\forall x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \geq 0$. Além disso, o requisito de performance (8.7) é atendido e otimizado para γ .*

Prova: A prova possui alguns pontos em comum com as provas dos Teoremas 7 e 8, mas difere em importantes aspectos, principalmente devido à dependência da função de chaveamento σ e função candidata à Lyapunov V em relação ao ruído de medida. A prova consiste em mostrar que se as LMIs (8.10) e (8.11) são satisfeitas, então as seguintes condições são verdadeiras:

$$\phi_1(e) \leq V(e, e_x, w) \leq \phi_2(e, e_x, w), \quad (8.14)$$

$$\mathbf{D}_h V(e, e_x, w) + \xi' \xi - \gamma w'_a w_a < 0, \quad (8.15)$$

onde $\phi_1(e)$, $\phi_2(e, e_x, w)$, são funções contínuas positivas definidas, e $\mathbf{D}_h V(\zeta)$, para $\zeta = (e, e_x, w)$ é a derivada direcional unilateral de V na direção $h = (\dot{e}, \dot{e}_x, \dot{w})$ dada por

$$\mathbf{D}_h V(\zeta) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{V(\zeta + \tau h) - V(\zeta)}{\tau} = \max_{i \in \sigma(\varepsilon)} \nabla v_i(\zeta) h, \quad (8.16)$$

onde $\nabla v_i(\zeta)$ é um vetor linha que indica o gradiente de $v_i(\zeta)$ (LASDON, 1970, p. 420).

Os principais argumentos usados são os seguintes:

- i. Assumindo que a matriz A de (8.1) é Hurwitz, segue que $e_x(t)$ converge exponencialmente para zero na ausência de distúrbio;
- ii. Por hipótese, o distúrbio $w(t)$ é absolutamente contínuo e quadraticamente integrável, portanto limitado, e $\lim_{t \rightarrow \infty} w_a(t) = 0$;
- iii. As condições (8.14) e (8.15) implicam que, com a diminuição dos distúrbios, $\xi' \xi - \gamma w_a' w_a$ torna-se não negativo e portanto $V(e, e_x, w)$ decresce;
- iv. Uma vez que $\phi_1(e) \leq V(e, e_x, w)$ conclui-se que $\phi_1(e)$ decresce levando assintoticamente o erro de estimação $e(t)$ para zero;
- v. Uma vez que w_a é limitado e o sistema (8.1) é exponencialmente estável, e_x também é limitado e portanto, para um $\|e\|$ limitado, mas suficientemente grande, o termo $\xi' \xi - \gamma w_a' w_a$ torna-se não negativo, devido à hipótese de posto completo de C_p , do fato de $A_\theta - L_\theta C$ ser inversível e de $C_p' D_p = 0$, $C_p' E_p = 0$. Portanto $V(e, e_x, w)$ também decresce indicando que o erro de estimação de estados $e(t)$ é limitado;
- vi. Como $e(t)$ e $e_x(t)$ são limitados, quando $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$ tem-se que $\lim_{t \rightarrow \infty} V(e(t), e_x(t), w(t)) = 0$ e portanto $\lim_{t \rightarrow \infty} (e(t), e_x(t)) = 0$. Em particular, (8.8) é uma função de Lyapunov para o sistema (8.4) na ausência de distúrbio;
- vii. A convergência $\lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{\theta} - \theta(\zeta(t))) = 0$ segue do fato que $V(e, e_x, w)$ é positiva definida e a expressão (8.15) é negativa definida nas variáveis $(e, e_x, w, \dot{w}, \bar{\theta} - \theta(\zeta))$. Isso implica que $\bar{\theta} - \theta(\zeta(t)) = 0$ é uma condição necessária para obter-se $V(e, e_x, w) = 0$, caso contrário $V(e, e_x, w)$ iria decrescer a partir de zero tornando-se negativa, o que contradiz a condição de V ser positiva definida;
- viii. Em (5.11), $v_i(e, e_x, w)$ são funções contínuas diferenciáveis e portanto $V(e, e_x, w)$ em (8.8) é uma função localmente Lipschitz contínua. Isso implica que, em particular, a derivada direcional e a derivada temporal coincidem em quase toda parte, levando a inequação $\frac{d}{dt} V(e, e_x, w) + \xi' \xi - \gamma w_a' w_a < 0$ a ser satisfeita em quase todo tempo, no sentido da medida de Lebesgue;
- ix. Por fim, obtém-se o requisito de performance (8.7) por integração na expressão $\frac{d}{dt} V(e, e_x, w) + \xi' \xi - \gamma w_a' w_a < 0$.

Os detalhes da prova são dados na sequência.

Para V em (8.8) segue a partir de (8.16) que

$$\mathbf{D}_h V(\zeta) := \max_{i \in \sigma(\varepsilon)} \nabla v_i(\zeta) h, \quad , \quad \zeta = (e, e_x, w), \quad (8.17)$$

onde o gradiente é um vetor linha definido como:

$$\nabla v_i(\zeta) = \frac{\partial v_i(\zeta)}{\partial \zeta} = \left[\frac{\partial v_i(\zeta)}{\partial e} \quad \frac{\partial v_i(\zeta)}{\partial e_x} \quad \frac{\partial v_i(\zeta)}{\partial w} \right], \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i(\zeta)}{\partial e} &= 2(\varepsilon' P_i + (S_i - S_{\bar{\theta}})') \frac{\partial \varepsilon}{\partial e} + 2e' Q_{\bar{\theta}}, \\ \frac{\partial v_i(\zeta)}{\partial e_x} &= 2(\varepsilon' P_i + (S_i - S_{\bar{\theta}})') \frac{\partial \varepsilon}{\partial e_x} + 2e'_x M_{\bar{\theta}}, \\ \frac{\partial v_i(\zeta)}{\partial w} &= 2(\varepsilon' P_i + (S_i - S_{\bar{\theta}})') \frac{\partial \varepsilon}{\partial w}, \end{aligned}$$

onde as derivadas parciais de ε são facilmente obtidas a partir de (5.10).

$$\left[\frac{\partial \varepsilon(\zeta)}{\partial e} \quad \frac{\partial \varepsilon(\zeta)}{\partial e_x} \quad \frac{\partial \varepsilon(\zeta)}{\partial w} \right] = [E'_1 \quad E'_2 \quad E'_3]. \quad (8.19)$$

Inicialmente, será demonstrada que a condição (8.14) é satisfeita. Para isso, verifica-se que para um dado elemento arbitrário $\bar{\theta} \in \Theta_m$ a seguinte relação é verdadeira:

$$\begin{aligned} V(e, e_x, w) &= \varepsilon' P_{\bar{\theta}} \varepsilon + 2\varepsilon' (S_{\bar{\theta}} - S_{\bar{\theta}}) + e' Q_{\bar{\theta}} e + e'_x M_{\bar{\theta}} e_x, \\ &\geq \varepsilon' P_{\bar{\theta}} \varepsilon + 2\varepsilon' (S_{\bar{\theta}} - S_{\bar{\theta}}) + e' Q_{\bar{\theta}} e + e'_x M_{\bar{\theta}} e_x. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Isso é verdade para qualquer $\bar{\theta} \in \Theta_m$, porque $V(e, e_x, w)$ é o máximo elemento de um conjunto de funções e a parcela à direita de (8.20) é uma combinação convexa particular dos elementos do conjunto. Em especial, quando $\bar{\theta} = \bar{\theta}$, conclui-se que

$$V(e, e_x, w) \geq \bar{V}(e, e_x, w) \quad , \quad \bar{V}(e, e_x, w) = \varepsilon' P_{\bar{\theta}} \varepsilon + e' Q_{\bar{\theta}} e + e'_x M_{\bar{\theta}} e_x. \quad (8.21)$$

Uma vez que $P_{\bar{\theta}}, Q_{\bar{\theta}}, M_{\bar{\theta}}$ são matrizes positivas definidas como mostrado em (8.10), conclui-se que $V(e, e_x, w)$ é uma função positiva definida limitada por baixo pela função contínua positiva definida $\phi_1(e) = e' Q_{\bar{\theta}} e$.

Usando (8.8) obtém-se

$$\begin{aligned} \phi_2(e, e_x, w) &= \max_{i \in \mathbb{I}_m} \{ \lambda_{\max}(P_i) \} \|\varepsilon(t)\|^2 + 2 \max_{i \in \mathbb{I}_m} \{ \|S_i\| \} \|\varepsilon(t)\| + \\ &\quad + \lambda_{\max}(M_{\bar{\theta}}) \|e_x\|^2 + \lambda_{\max}(Q_{\bar{\theta}}) \|e(t)\|^2 + 2 \|S_{\bar{\theta}}\| \|\varepsilon(t)\|. \end{aligned}$$

Para mostrar que a condição (8.15) é satisfeita, as seguintes notações auxiliares são utilizadas. Seja f_e o campo vetorial caracterizado pelo sistema chaveado (8.4), ou seja, $\dot{e}(t) = f_e(t)$ onde

$$\begin{aligned} f_e &= (A_\theta - L_\theta C) e + (A_{\bar{\theta}} - A_\theta) (x - \bar{x}) + \\ &\quad + (A_{\bar{\theta}} - A_\theta) \bar{x} + b_{\bar{\theta}} - b_\theta + (B - L_\theta D) w, \\ &= (A_\theta - L_\theta C) e + (A_{\bar{\theta}} - A_\theta) e_x + \\ &\quad + A_a ((\bar{\theta} - \theta) \otimes \bar{x}) + B_a (\bar{\theta} - \theta) + (B - L_\theta D) w. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Na expressão (8.22), usa-se as identidades $b_{\bar{\theta}} - b_\theta = B_a (\bar{\theta} - \theta)$ e $A_{\bar{\theta}} \bar{x} - A_\theta \bar{x} = A_a ((\bar{\theta} - \theta) \otimes \bar{x})$.

De forma similar, define-se f_x como o campo vetorial do seguinte sistema:

$$\dot{e}_x(t) = A_{\bar{\theta}} e_x(t) + B w(t), \quad e_x = x - \bar{x}, \quad f_x = A_{\bar{\theta}} e_x + B w, \quad (8.23)$$

obtido a partir de (8.1) utilizando a mudança de variáveis $e_x = x - \bar{x}$.

Com a notação (8.23), usando a derivada direcional na direção $h = (f_e, f_x, \dot{w})$, constrói-se a expressão (8.17) para o sistema (8.4). A primeira situação a ser considerada é quando $\sigma(\varepsilon)$ é um conjunto unitário no ponto “ ε ” de uma região e a trajetória não deixa essa região nesse ponto. Nesse caso, $\sigma(\varepsilon) = \{i\}$ para algum $i \in \mathbb{I}_m$, $\theta_i(\zeta) = 1$, portanto $\theta_j(\zeta) = 0$ para $j \notin \sigma(\varepsilon)$, assim escreve-se (8.17) como (8.24).

$$\mathbf{D}_h V(\zeta) = \sum_{i=1}^m \theta_i(\zeta) \nabla v_i(\zeta) h, \quad h = (f_e, f_x, \dot{w}). \quad (8.24)$$

Outra situação de interesse é quanto $\sigma(\varepsilon)$ não é conjunto unitário em um ponto “ ε ” na superfície de chaveamento e a trajetória não deixa a superfície de chaveamento nesse ponto, ou seja $\sigma(\varepsilon)$ permanece constante durante um certo intervalo de tempo. Nesse caso, o movimento de deslizamento está ocorrendo, e para todos os pontos da trajetória $\varepsilon(t)$ durante esse intervalo de tempo tem-se que:

$$\begin{cases} v_i(\zeta(t)) = v_j(\zeta(t)) = V(\zeta(t)) \\ \nabla v_i(\zeta(t)) h(t) = \nabla v_j(\zeta(t)) h(t) \end{cases}, \quad \forall i, j \in \sigma(\varepsilon(t)). \quad (8.25)$$

Em particular, como $\nabla v_i(\zeta(t)) h(t) = \nabla v_j(\zeta(t)) h(t)$ e como $\theta_i(\zeta) = 0$ para $i \notin \sigma(\varepsilon)$ pode-se também reescrever (8.17) como em (8.24).

A última situação a ser analisada é quando $\sigma(\varepsilon)$ muda. Essa situação pode ocorrer quando $\sigma(\varepsilon)$ não é conjunto unitário em um ponto “ ε ”

da superfície de chaveamento e a trajetória deixa a superfície nesse ponto, ou quando $\sigma(\varepsilon)$ é conjunto unitário em um ponto “ ε ” de uma região e a trajetória deixa essa região nesse ponto. Nessas situações $\sigma(\varepsilon)$ muda e como $\sigma(\varepsilon(t))$ é constante por partes, a trajetória move para uma nova região ou para a superfície de chaveamento, que é uma das situações previamente discutidas, onde (8.24) é satisfeita. Esses pontos onde σ é descontínuo correspondem, portanto, a pontos isolados da trajetória do sistema. Observa-se que $V(\zeta)$ em (8.8) é localmente Lipschitz contínua, assim conclui-se que $V(\zeta(t))$ decresce ao longo de toda trajetória do sistema $\zeta(t)$ desde que o decrescimento esteja assegurado no contexto dos dois casos anteriores onde (8.24) é válido.

Observa-se a partir de (8.15) que $V(\zeta)$ é decrescente onde $\xi'\xi - \gamma w_a' w_a$ é não negativo. Usando a hipótese que o distúrbio é absolutamente contínuo, quadraticamente integrável e converge para zero, tem-se que o erro da estimação de estado converge para zero e é limitado em toda trajetória do sistema. Em particular, o requisito usado nesses argumentos de que $A_\theta - L_\theta C$ é inversível é decorrente da condição $\langle GA_\theta - H_\theta C \rangle < 0$ e $\langle G \rangle > 0$ que estão implícitas na LMI (8.11). Como $V(\zeta)$ é localmente Lipschitz, tem-se que a derivada direcional e a derivada temporal coincidem em quase toda parte, e $\mathbf{D}_h V(\zeta) < 0$ garante o decrescimento de $V(\zeta(t))$ mesmo para a trajetória do sistema movendo-se ao longo das linhas ou superfícies onde o gradiente de $V(\zeta)$ não existe e portanto a expressão usual para a derivada temporal não pode ser usada. Detalhes sobre esse ponto foram discutidos na Seção 2.2 e encontram-se em (FILIPPOV, 1988, p. 155).

Observe, a partir de (8.14) e (8.15), $V(\zeta)$ é positiva definida e não crescente na ausência de distúrbio. Portanto a origem é um ponto de equilíbrio para o sistema de erro sempre que essas condições são satisfeitas. Nesse caso, as condições de convergência do teorema decorrem dos mesmos argumentos usados em (FILIPPOV, 1988, p. 155), isto é, convergência global para $x(t)$.

Uma vez que $V(\zeta)$ é localmente Lipschitz contínua, a derivada direcional e a derivada temporal coincidem para quase todo $t \in [0, \infty)$. Portanto (8.15) implica que

$$\frac{d}{dt} V(\zeta(t)) + \xi'(t)\xi(t) - \gamma w_a'(t)w_a(t) < 0 \quad (8.26)$$

é satisfeita para quase todo $t \in [0, \infty)$. Uma vez que o índice de performance (8.7) é definido para o sistema no equilíbrio, tem-se que $\zeta(0) = (e(0), e_x(0), w(0)) = 0$ levando a $V(\zeta(0)) = 0$. Além disso, como mostrado anteriormente tem-se que $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\zeta(t)) = 0$. Portanto, ao integrar (8.26), no sentido da integral

de Lebesgue, obtém-se

$$\int_0^\infty \xi'(t)\xi(t)dt - \gamma \int_0^\infty w'_a(t)w_a(t)dt < 0, \quad (8.27)$$

que pode ser reescrito como (8.7).

Como, em geral, $\theta(\zeta)$ é uma função conjunto de difícil caracterização, usa-se uma condição mais conservadora onde $\theta(\zeta)$ é substituído por um parâmetro θ arbitrário e variante no tempo, assumindo valores no simplex unitário Θ_m . Para reduzir o conservadorismo associado a essa relaxação do problema será utilizado o *S-Procedure* na condição (8.21) e levando em conta a restrição $V(\zeta) - \bar{V}(\zeta) \geq 0$. Assim obtém-se

$$\mathbf{D}_h V(\zeta) + \xi' \xi - \gamma w'_a w_a + \alpha (V(\zeta) - \bar{V}(\zeta)) < 0, \quad (8.28)$$

$\forall e \neq 0, \forall \bar{\theta}, \theta \in \Theta_m$. $\alpha > 0$ é um fator de escala dado².

Resta ainda mostrar que a LMI (8.11) implica em (8.28) e portanto (8.15). Com esse objetivo, considere a seguinte notação:

$$\Xi(\zeta_a) = \sum_{i=1}^m \theta_i \nabla v_i(\zeta) h + \alpha (V(\zeta) - \bar{V}(\zeta)) + \xi' \xi - \gamma w'_a w_a, \quad (8.29)$$

onde $\zeta_a = (\zeta, \dot{w}, \bar{\theta} - \theta)$ e observe que $\Xi(\zeta_a) < 0$ é a expressão (8.28) com a notação (8.24), (8.18), (8.21).

Usando manipulações simples obtém-se

$$\begin{aligned} \Xi(\zeta_a) = & \left(2(\varepsilon' P_\theta + (S_\theta - S_{\bar{\theta}})') \frac{\partial \varepsilon}{\partial e} + 2e' Q_{\bar{\theta}} \right) f_e \\ & + \left(2(\varepsilon' P_\theta + (S_\theta - S_{\bar{\theta}})') \frac{\partial \varepsilon}{\partial e_x} + 2e'_x M_{\bar{\theta}} \right) f_x \\ & + \left(2(\varepsilon' P_\theta + (S_\theta - S_{\bar{\theta}})') \frac{\partial \varepsilon}{\partial w} \right) \dot{w} \\ & + \alpha (V(\zeta) - \bar{V}(\zeta)) + \xi' \xi - \gamma w'_a w_a, \end{aligned} \quad (8.30)$$

onde f_e, f_x são definidos em (8.22), (8.23) e ε em (5.7).

A partir de (8.11) usando o lema de Finsler, segue que existe uma constante positiva τ tal que

$$U = \Gamma(\theta, \bar{\theta}) + \langle G_a C_a(\theta) + G_b(\theta, \bar{\theta}) C_b \rangle - \tau \tilde{N}' \tilde{N} < 0. \quad (8.31)$$

Considerando os vetores auxiliares π, η de (8.6) e definindo novos

vetores auxiliares μ e μ_a como segue:

$$\begin{aligned}
 \pi &= (A_\theta - L_\theta C) e + (B - L_\theta D) w, \\
 \eta &= (A_{\bar{\theta}} - A_\theta) e_x + A_a \bar{\mu} + B_a (\bar{\theta} - \theta), \\
 \mu &= \begin{bmatrix} e' & e'_x & \dot{e}'_x & \pi' & \eta' & w' & \dot{w}' & (\bar{\theta} - \theta)' \end{bmatrix}', \\
 \bar{\mu} &= (\bar{\theta} - \theta) \otimes \bar{x}, \\
 \tilde{\mu} &= (\bar{\theta} - \theta) \otimes b_{\bar{\theta}}, \\
 \mu_a &= \begin{bmatrix} \mu' & \bar{\mu}' & \tilde{\mu}' \end{bmatrix}',
 \end{aligned} \tag{8.32}$$

e nota-se que

$$\begin{aligned}
 \zeta &= \mathbf{F}_a \mu_a, \quad f_e = \eta + \pi = \mathbf{F}_b \mu_a, \quad e = \mathbf{F}_c \mu_a, \quad \bar{\theta} - \theta = \mathbf{F}_d \mu_a, \\
 e_x &= \mathbf{F}_e \mu_a, \quad f_x = \mathbf{F}_f \mu_a, \quad \dot{w} = \mathbf{F}_g \mu_a, \quad \xi = \mathbf{F}_h \mu_a, \quad w_a = \mathbf{F}_p \mu_a.
 \end{aligned} \tag{8.33}$$

Com a notação acima, mostra-se a seguir que $\Xi(\zeta_a) = \mu'_a U \mu_a$. Note que $C_b \mu_a = 0$ e $\tilde{N} \mu_a = 0$ e portanto verifica-se, a partir de (8.12) e (8.31), que:

$$\begin{aligned}
 \mu'_a U \mu_a &= \mu'_a (\Gamma(\theta, \bar{\theta}) + \langle G_a C_a(\theta) + G_b(\theta, \bar{\theta}) C_b \rangle - \tau \tilde{N}' \tilde{N}) \mu_a, \\
 &= \mu'_a \Gamma(\theta, \bar{\theta}) \mu_a + \mu'_a \langle G_a C_a(\theta) + G_b(\theta, \bar{\theta}) C_b \rangle \mu_a.
 \end{aligned} \tag{8.34}$$

A identidade $\tilde{N} \mu_a = 0$ é obtida a partir do fato que $(\mathbf{1}_{1 \times m} \otimes I_n) \bar{\mu} = 0$, $(\mathbf{1}_{1 \times m} \otimes I_n) \tilde{\mu} = 0$ e $\mathbf{1}_{1 \times m} (\bar{\theta} - \theta) = 0$ com $\sum_{i=1}^m \theta_i = \sum_{i=1}^m \bar{\theta}_i = 1$. A identidade $C_a(\theta) \mu_a = 0$ é essencialmente a expressão de π em (8.32) e $C_b(\theta, \bar{\theta}) \mu_a = 0$ representa a expressão de η, \dot{e}_x , dado por $C_c \mu_a = 0$ e $C_d \mu_a = 0$ e a estrutura de $\bar{\theta} - \theta$, $\bar{\mu}$ e $\tilde{\mu}$ através da expressão $C_e \mu_a = 0$.

Fazendo o uso de $\Gamma(\theta, \bar{\theta})$ em (8.12) e a notação (8.19) e (8.32), o termo $\mu'_a \Gamma(\theta, \bar{\theta}) \mu_a$ pode ser representado como a soma de outros termos indicados em (8.35).

$$\begin{aligned}
 \left(2(\varepsilon' P_\theta + (S_\theta - S_{\bar{\theta}})') \frac{\partial \varepsilon}{\partial e} + 2e' Q_{\bar{\theta}} \right) f_e &= 2\mu'_a \Gamma_a \mu_a, \\
 \left(2(\varepsilon' P_\theta + (S_\theta - S_{\bar{\theta}})') \frac{\partial \varepsilon}{\partial e_x} + 2e'_x M_{\bar{\theta}} \right) f_x &= 2\mu'_a \Gamma_b \mu_a, \\
 \left(2(\varepsilon' P_\theta + (S_\theta - S_{\bar{\theta}})') \frac{\partial \varepsilon}{\partial w} \right) \dot{w} &= 2\mu'_a \Gamma_c \mu_a, \\
 \alpha(V(\zeta) - \bar{V}(\zeta)) &= -\alpha \mu'_a \Gamma_d \mu_a, \\
 \xi' \xi &= \mu'_a \Gamma_e \mu_a, \\
 -\gamma w'_a w_a &= -\gamma \mu'_a \Gamma_f \mu_a.
 \end{aligned} \tag{8.35}$$

Com as identidades (8.35), segue que $\Xi(\zeta_a)$ em (8.30) pode ser representado como $\Xi(\zeta_a) = \mu'_a(\Gamma(\theta, \bar{\theta}) + \langle G_a C_a(\theta) + G_b(\theta, \bar{\theta}) C_b \rangle - \tau \tilde{N}' \tilde{N}) \mu_a = \mu'_a U \mu_a$.

Isso mostra que (8.11), ou de forma equivalente (8.31), implica em $\Xi(\zeta_a) < 0$ e que, por sua vez, implica em (8.28) e portanto (8.15). Para completar a prova, observa-se que $\mu'_a U \mu_a$ é uma função negativa definida do vetor $\zeta_a = (\zeta, \dot{w}, \bar{\theta} - \theta)$. Isso implica que $\bar{\theta} - \theta = 0$ é uma condição necessária para obter-se $V(\zeta) = 0$, caso contrário $V(\zeta)$ torna-se negativo, contradizendo a condição de positividade definida de V . Observa-se que $V(\zeta) = 0$ implica em $\zeta = (e, e_x, w) = 0$. Portanto, na ausência de distúrbio, $\dot{e} = e = 0$ e $\dot{e}_x = e_x = 0$ são pontos de equilíbrio do sistema (8.4), (8.23) e o equilíbrio de (8.4) é alcançado com $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(\zeta(t)) = \theta(0) = \bar{\theta}$, ou seja, (5.14) é satisfeito com $\hat{\theta} = \bar{\theta}$, completando a prova. \square

8.1 RELAXAÇÃO NA CONVERGÊNCIA PARAMÉTRICA

Suponha que exista $\tilde{\theta} \in \Theta_m$, tal que $A_{\tilde{\theta}} \bar{x} + b_{\tilde{\theta}} = 0$ e $\tilde{\theta} \neq \bar{\theta}$. Lembre que $\bar{x} = -A_{\bar{\theta}}^{-1} b_{\bar{\theta}}$. Nesse caso o termo $(A_{\bar{\theta}} - A_{\theta}) \bar{x} + b_{\bar{\theta}} - b_{\theta}$ de f_e em (8.22) é zero para $\theta = \tilde{\theta} \neq \bar{\theta}$ e também o termo $(S_{\theta} - S_{\tilde{\theta}})' \frac{\partial \varepsilon}{\partial e_x} ((A_{\bar{\theta}} - A_{\theta}) \bar{x} + b_{\bar{\theta}} - b_{\theta}) = 0$, que corresponde a um valor particular de $\Xi(\zeta_a)$ em (8.30) obtido com $\zeta = 0$ e $\dot{w} = 0$. Isso mostra que $\Xi(\zeta_a)$ não é uma função negativa definida de $\bar{\theta} - \theta$ e portanto as condições do Teorema 9 falham, uma vez que exige-se que a LMI (8.11) seja estritamente factível. Em resumo, quando o ponto de equilíbrio \bar{x} pode ser obtido com diferentes valores de $\bar{\theta} \in \Theta_m$, a LMI (8.11) não pode ser estritamente factível. Observe que $\bar{\theta}$ que satisfaz (5.2) é único se Θ_m possui o menor número de dimensões possível no espaço de parâmetros, ou seja, a caracterização do polítopo para os possíveis valores de (A, b) é também um simplex. Entretanto, mesmo nesse caso é possível que se obtenha $\bar{x} = -A_{\bar{\theta}}^{-1} b_{\bar{\theta}}$ satisfeita com $\bar{\theta} \neq \bar{\theta} \in \Theta_m$. Esse é o caso, por exemplo, quando o ponto de equilíbrio não depende dos parâmetros incertos, levando $\bar{x} = -A_{\bar{\theta}}^{-1} b_{\bar{\theta}}$ a ser satisfeita para todos os valores desse parâmetro. Esse ponto é ilustrado através do exemplo numérico desse capítulo. Uma forma de contornar essa dificuldade é relaxar o requisito de convergência em (5.6), removendo a convergência paramétrica. Nesse caso é suficiente relaxar a condição (8.15) para

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_h V(e, e_x, w) + \xi' \xi - \gamma w'_a w_a + \beta \mu'_b \mu_b &\leq 0, \\ \mu_b &= \begin{bmatrix} e' & e'_x & \dot{e}'_x & \pi' & \eta' & w' & \dot{w}' \end{bmatrix}', \end{aligned} \quad (8.36)$$

onde $\beta > 0$ é uma nova variável de decisão a ser determinada. Nesse caso, os mesmos argumentos usados para mostrar que $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\zeta(t)) = 0$, e portanto $\lim_{t \rightarrow \infty} (e(t), e_x(t)) = 0$ permanecem válidos, mas nesse caso $\hat{\theta} = \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(\zeta(t))$ é satisfeito para qualquer parâmetro tal que $\bar{x} = -A_{\hat{\theta}}^{-1}b_{\hat{\theta}}$ sem a necessidade de satisfazer $(A_{\hat{\theta}}, b_{\hat{\theta}}) = (A, b)$. A expressão (8.36) pode ser representada em termos de uma LMI como

$$N'(\Gamma(\theta, \bar{\theta}) + \beta \tilde{\Gamma}' \tilde{\Gamma} + \langle G_a C_a(\theta) + G_b(\theta, \bar{\theta}) C_b \rangle) N \leq 0, \quad (8.37)$$

onde $\beta > 0$, e $\tilde{\Gamma} = [I_{5n+2n_w} \quad \mathbf{0}_{5n+2n_w \times m+2mn}]$ é tal que $\tilde{\Gamma} \mu_a = \mu_b$. O observador, nesse caso torna-se um observador de estados robusto para todo o conjunto de parâmetros incertos. Nesse sentido, o erro na estimação de estados converge para zero independentemente dos valores que (A, b) possam assumir no invólucro convexo $\mathbf{Co}\{(A_i, b_i), i \in \mathbb{I}_m\}$.

Seja n_p o número de parâmetros a ser estimado e $(A_i, b_i), i \in \mathbb{I}_m$ os vértices do politopo $\Pi = \mathbf{Co}\{(A_i, b_i), i \in \mathbb{I}_m\}$ definido os possíveis valores dos parâmetros do sistema. Se o número de vértices de Π é $m = n_p + 1$ o politopo é um simplex e a representação dos parâmetros do sistema é única em termos da combinação convexa dos vértices. Quando o número de vértices é maior que $n_p + 1$ existe uma alternativa para obter-se uma representação única para os parâmetros do sistema. A ideia é encontrar um politopo com $n_p + 1$ vértices que englobe o politopo original. Mesmo que isso seja sempre possível, o conjunto de parâmetros que representa o sistema é aumentado introduzindo algum conservadorismo na representação do sistema. Uma segunda alternativa que está em investigação é dividir o politopo original Π em politopos menores $\Pi_i, i \in \mathbb{I}_{m_d}$ tal que cada Π_i tenha $n_p + 1$ vértices e que a união de Π_i recupere o politopo original Π . Mesmo que essa ideia pareça menos conservadora, existem detalhes técnicos que demandam uma investigação mais aprofundada e os resultados serão apresentados em trabalhos futuros.

8.2 EXEMPLO NUMÉRICO

Nesse exemplo, para encontrar uma solução para as LMIs foi utilizado o *solver* SeDuMi com a interface YALMIP para o Matlab. As simulações foram realizadas com o Simulink para avaliar a resposta do sistema.

Considere o sistema mecânico mostrado na Fig. 16 onde os blocos possuem massa m_a e m_b , as constantes das molas são k_a e k_b e o movimento está sujeito à atrito viscoso com coeficientes b_a e b_b respectivamente. Esse sistema pode ser representado como (5.1) usando a notação (8.38).

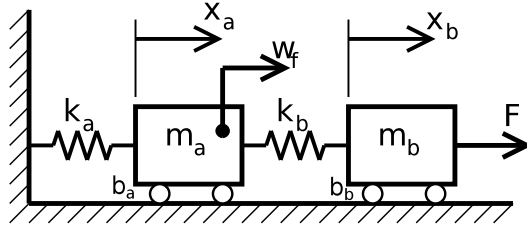


Figura 16 – Sistema de duas massas, mola e atrito viscoso

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \ddot{x}_a \\ \dot{x}_b \\ \ddot{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_a+k_b}{m_a} & -\frac{b_b}{m_a} & \frac{k_a}{m_a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_a}{m_b} & 0 & -\frac{k_a}{m_b} & -\frac{b_b}{m_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \dot{x}_a \\ x_b \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{F}{m_b} \end{bmatrix} + Bw \quad (8.38)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \dot{x}_a \\ x_b \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} + Dw, \quad (8.39)$$

onde

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O vetor das variáveis de estado é $x = [x_a \ \dot{x}_a \ x_b \ \dot{x}_b]'$, que são formadas pelas posições dos blocos (x_a , x_b) e suas velocidades (\dot{x}_a , \dot{x}_b), com valores referidos ao ponto de equilíbrio definido pela força externa aplicada ao bloco b . O vetor de medição $y(t)$ corresponde às posições x_a , x_b e à velocidade \dot{x}_b . O ponto de equilíbrio para esse sistema pode ser analiticamente obtido com

$$\bar{x} = -A^{-1}b = \left[\frac{F}{K_a} \quad 0 \quad \frac{F(k_a+k_b)}{k_a k_b} \quad 0 \right]'. \quad (8.40)$$

Considera-se que o sistema é submetido a distúrbios externos $w = [w_f \ w_p \ w_v]'$ onde a força w_f atua sobre o bloco a e os distúrbios w_p, w_v, w_f atuam sobre os sinais de medição de posição e velocidade do bloco b e a posição do bloco a . Nas simulações o sinal w_f é obtido através de um ruído branco filtrado em uma largura de banda estreita e os distúrbios de medida

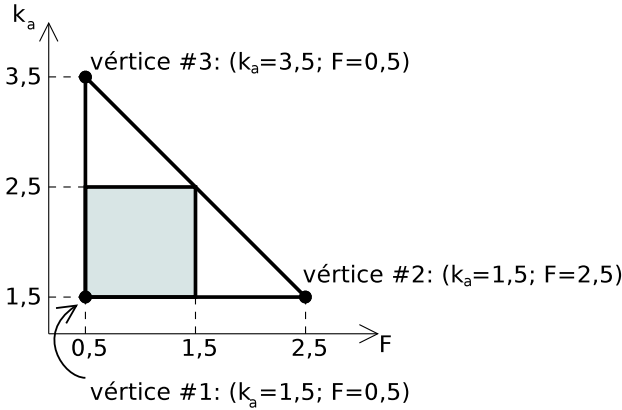


Figura 17 – Três vértices do politopo Θ_3 abrangendo $F \in [0,5; 1,5]$ e $k_a \in [1,5; 2,5]$

são ruídos brancos filtrados em uma largura de banda maior que o distúrbio de força. Considera-se também nas simulações o estado inicial do sistema (8.1) e do observador (5.3), respectivamente $x(0) = [0, 1 \quad 0 \quad 0,2 \quad 0]'$ e $z(0) = 0$. As simulações foram realizadas no Simulink para um passo de integração de 1ms.

No primeiro cenário, a constante de mola k_a é considerada desconhecida, mas limitada pelas seguintes constantes $k_a \in \mathbf{Co}\{1,5; 2,5\}$ e de forma semelhante, uma entrada de força $F \in \mathbf{Co}\{0,5; 1,5\}$. Nesse cenário considera-se o problema de estimar os estados e esses dois parâmetros incertos de forma conjunta. Os demais parâmetros usados são $k_b = 3$, $b_a = 3$, $b_b = 3$, $m_a = 3$ e $m_b = 4$. As unidades estão no Sistema Internacional de Unidades.

No espaço de parâmetros $F \times k_a$, as condições $F \in \mathbf{Co}\{0,5; 1,5\}$ e $k_a \in \mathbf{Co}\{1,5; 2,5\}$ corresponderiam a um politopo de 4 vértices, formando o retângulo da Fig. 17. Nessa situação, a representação dos parâmetros como uma combinação convexa dos vértices não é única e a convergência do erro de estimação não é possível, como mostrado na seção 8.1. Com a finalidade de reduzir o número de vértices do politopo, considera-se um politopo de 3 vértices que englobe o politopo original de 4 vértices. Esse novo politopo corresponde ao triângulo indicado na Fig. 17. Mesmo aumentando consideravelmente o conjunto de parâmetros incertos, no triângulo os parâmetros (F, k_a) e suas estimativas (\hat{F}, \hat{k}_a) possuem representação única em termos da combinação convexa de seus vértices.

As matrizes E_a e E_b de (5.7) e as matrizes de ponderação para a saída

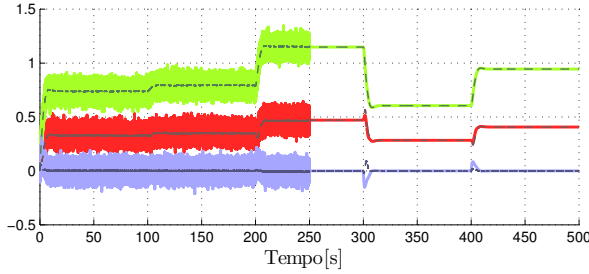


Figura 18 – Saída medida (y_1 : superior, y_2 : intermediária e y_3 : inferior) e suas respectivas estimativas (linha tracejada).

de performance $\xi = [\pi' \ 0,1\eta' \ 0,1\dot{w}']'$ estão indicadas abaixo.

$$E_a = [0 \ 0 \ 1], \quad E_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_p = \begin{bmatrix} I_4 \\ \mathbf{0}_{6 \times 4} \end{bmatrix}, D_p = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 3} \\ 0,1I_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}, E_p = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 3} \\ \mathbf{0}_3 \\ 0,1I_3 \end{bmatrix} \quad (8.41)$$

As soluções das LMIs (8.10) e (8.11) foram obtidas² para $\alpha = 2$ e obteve-se um índice de performance de $\gamma = 25,13$. A condição inicial do sistema (8.1) e do observador (8.2) são respectivamente $x(0) = [0,1 \ 0 \ 0,2 \ 0]'$ e $z(0) = 0$.

Os resultados da simulação para a estimação de estado são mostrados na Fig. 18, onde as linhas coloridas contínuas são a saída medida y que é contaminada por distúrbios e as linhas tracejadas são a sua respectiva estimação Cz obtidas com o observador. Para simular a saída do sistema utilizou-se o modelo do sistema com $k_a = 2,0$ e a força assumindo diferentes valores durante a simulação. Os distúrbios permanecem ativos entre 0s e 250s. Após 250s é possível verificar que a saída estimada do sistema $Cz(t)$ iguala-se ao valor verdadeiro $y(t)$. Para ilustrar a convergência da estimação de estado para o estado verdadeiro em um cenário ideal, simulou-se o sistema sem o distúrbio até que a convergência tenha sido alcançada. Para esse fim, simulou-se a estimação das variáveis de estado sem a influência do distúrbio durante os primeiros 15s, sendo esse adicionado no restante da simulação. O resultado dessa simulação é apresentado na Fig. 19. O distúrbio de força aplicado no bloco a é um ruído branco com limitação de banda de amplitude que alcança

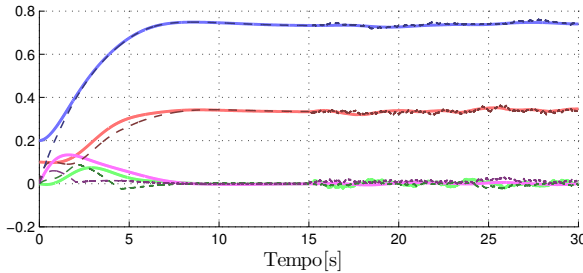


Figura 19 – Estados reais (linhas contínuas) e suas estimações (linhas tracejadas) para $x(0) = (0, 1; 0; 0, 2; 0)$, $z(0) = 0$ com agindo após 15s.

aproximadamente 20% do valor nominal de F aplicado ao bloco b , mas o impacto na posição desse bloco é atenuada, pois o sistema atua como um filtro passa baixa. O impacto dos distúrbios de medição podem ser observados na Fig. 18.

Na Fig. 20 é mostrado o resultado para a estimação de parâmetros \hat{k}_a e \hat{F} . A estimação é calculada de acordo com o Comentário 6 com $T = 0,2s$ e um passo de integração de 1ms. Essa simulação foi realizada em um contexto ideal onde a frequência de chaveamento e a frequência de amostragem são igualmente rápidas. Como a atualização de $\sigma(\varepsilon(t))$ a partir da medição $\varepsilon(t)$ pode ser realizada de forma bastante rápida durante um passo de integração, o comportamento é similar ao de um sistema em tempo contínuo. O impacto ao considerar dispositivos com conversores analógico-digital(A/D) e digital-analógico(D/A) será discutido posteriormente. De acordo com a Fig. 17, as estimativas de k_a são dadas por $\hat{k}_a = 1,5\theta_1 + 1,5\theta_2 + 3,5\theta_3$. A força F assume diferentes valores no conjunto $\mathbf{Co}\{0,5; 1,5\}$ e sua estimativa é dada por $\hat{F} = 0,5\theta_1 + 2,5\theta_2 + 0,5\theta_3$. Após 250s, o sinal de distúrbio é desligado e a estimativa de parâmetro permanece no valor verdadeiro, que é indicado pelas linhas tracejadas.

No segundo cenário, considera-se o problema de estimar as variáveis de estado do sistema e os coeficientes de atrito (b_a, b_b), assumindo que esses pertencem ao conjunto $b_a, b_b \in \mathbf{Co}\{2,5; 3,5\}$. Os demais parâmetros usados são $k_b = 2$, $k_a = 3$, $m_a = 3$, $m_b = 4$ e a força $F = 1$. As unidades estão no Sistema Internacional de Unidades.

Para esse cenário, o equilíbrio do sistema não depende dos parâmetros a serem estimados, como pode ser visto em (8.40). Como o equilíbrio \bar{x} é completamente conhecido, tem-se, a partir de (5.7), que $E_a = I_3$ e $E_b = I_4$.

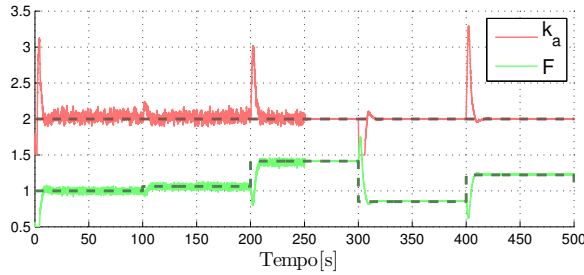


Figura 20 – Estimações \hat{k}_a e \hat{F} e seus valores verdadeiros (linhas tracejadas). O passo de integração é de 1ms e o intervalo de média móvel é de $T = 200\text{ms}$.

Mesmo para um politopo de 3 vértices no espaço de parâmetros $b_a \times b_b$, como indicado na Fig. 21, sempre existem diferentes valores de $\hat{\theta}$ que levam para o mesmo $\bar{x} = -A_{\hat{\theta}}^{-1}b_{\hat{\theta}}$ e a convergência paramétrica para o valor verdadeiro não é possível, como mostrado na seção 8.1. Nesse caso, usa-se a condição (8.37) ao invés de (8.11) o que leva a um observador robusto, onde a trajetória das variáveis de estado é mostrada na Fig. 22.

A solução das LMIs (8.10) e (8.11) foram obtidas para $\alpha = 2$ e obteve-se um índice de performance de $\gamma = 3,49$.

Para simular a saída do sistema, utilizou-se o modelo com $b_a = b_b = 3$ e os termos de $w(t)$ como um ruído branco com limitação de banda. Observa-se que o erro na estimação de estados converge para zero após a perturbação cessar e mesmo assim a estimativa de parâmetro não converge para os parâmetros do sistema. Para ilustrar esse fato, note que a convergência paramétrica satisfaz $\bar{x} = -A_{\hat{\theta}}^{-1}b_{\hat{\theta}}$, mas a estimação de parâmetros não converge para os parâmetros do sistema. Esse resultado de simulação é mostrado na Fig. 23. Observa-se nesse caso que $\hat{\theta}_2 = 1$ e portanto $\bar{x} = -A_2^{-1}b_2$. De fato, como o equilíbrio não depende dos parâmetros incertos, tem-se que $\bar{x} = -A_{\theta}^{-1}b_{\theta}$ para qualquer $\theta \in \Theta_3$. Em particular, isso implica que o equilíbrio do sistema chaveado é também o equilíbrio de todos os sistemas $\bar{x} = -A_i^{-1}b_i$, $\forall i \in \mathbb{I}_3$ e portanto o equilíbrio é alcançado sem chaveamento, com $\sigma(t) = i$ para qualquer $i \in \mathbb{I}_3$ durante todo o tempo.

Observa-se que o sistema é contínuo e não há chaveamento de sinais de potência no sistema. A taxa de atualização de $\sigma(\varepsilon(t))$ a partir da medição $\varepsilon(t)$ é geralmente limitada pela taxa de amostragem do conversor A/D. Para ilustrar o impacto do uso de conversores A/D e D/A, apresenta-se na

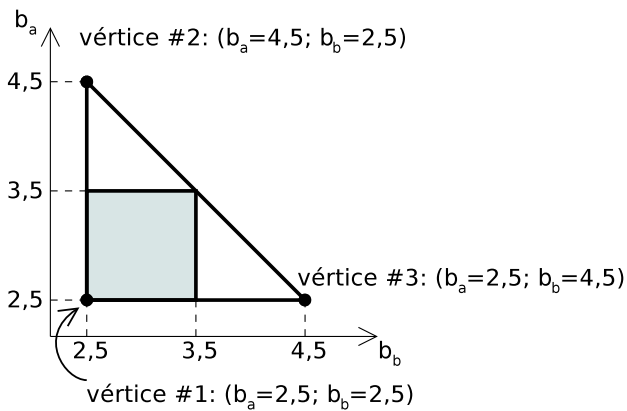


Figura 21 – Três vértices do polítopo abrangendo $b_a \in \mathbf{Co}\{2,5; 3,5\}$ e $b_b \in \mathbf{Co}\{2,5; 3,5\}$

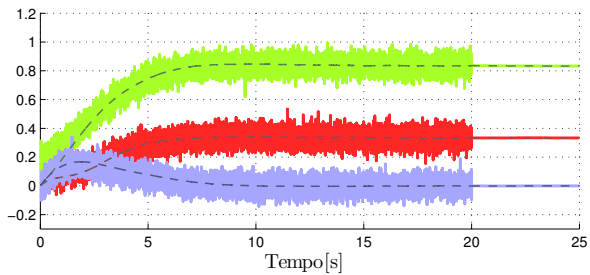


Figura 22 – Saída medida (y_1 : superior, y_2 : intermediário e y_3 : inferior) e suas respectivas estimativas (linha tracejada).

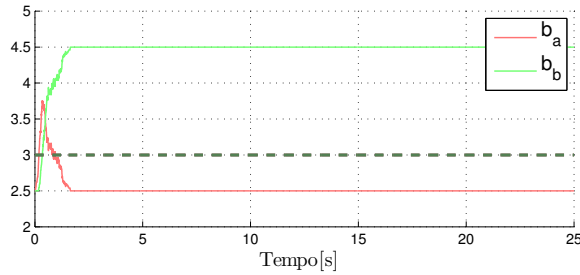


Figura 23 – Parâmetros estimados $b_a = 2,5\theta_1 + 4,5\theta_2 + 2,5\theta_3$ e $b_b = 2,5\theta_1 + 2,5\theta_2 + 4,5\theta_3$ obtidos a partir de (6.31). O passo de integração é de 1ms e o intervalo de média móvel é $T = 200\text{ms}$.

Fig. 24 o resultado obtido com um passo de integração de 1ms, um conversor A/D com período de amostragem de 40ms, o intervalo de média móvel de $T = 800\text{ms}$ e um sustentador de ordem zero (*sample & hold*). Como esperado, nesse caso os erros convergem para um ciclo limite próximo da origem e a amplitude do ciclo limite é proporcional ao período de amostragem. Lembrando que, a partir do Comentário 6, a aproximação (6.31), que é usada para obter a estimativa de parâmetros, requer que o período de amostragem seja suficientemente pequeno.

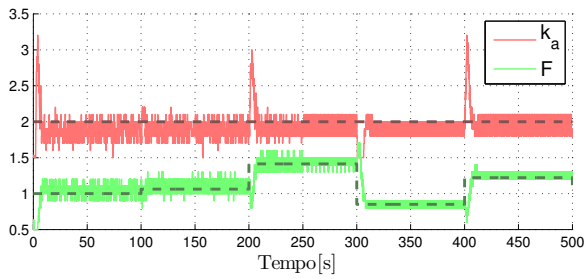


Figura 24 – Estimações \hat{k}_a e \hat{F} e seus valores verdadeiros (linhas tracejadas). O período de amostragem é de 40ms e período de média móvel é de $T = 800$ ms. O distúrbio é removido após 250s.

9 CONCLUSÕES

Neste trabalho propõe-se uma nova abordagem para o problema de estimação das variáveis de estado e de parâmetros baseada em observadores chaveados, como descritos no Capítulo 5. O projeto do ganho do observador e a lei de chaveamento é realizado através da solução um conjunto de LMIs, como mostrado nos Capítulos 6, 7 e 8. O método apresentado não necessita que as matrizes estejam em nenhuma forma canônica especial ou que seja necessário utilizar transformações de similaridade, comumente encontradas nos métodos de estimação de estados e parâmetros em forma conjunta.

A técnica proposta no Capítulo 7 é uma extensão da técnica descrita no Capítulo 6, onde inclui-se um índice de performance na resolução do problema, minimizando-se assim a norma de um funcional composto pelos erros de estimação de estados e de parâmetros. Matrizes de ponderação dadas permitem ajustar como esses erros de estimação de estados ou de parâmetros convergem para zero. Com esse resultado gerou-se a publicação (PINTO; TROFINO, 2014).

A técnica proposta no Capítulo 8 é a mais recente contribuição deste trabalho e a menos conservadora nos seguintes sentidos: (i) as LMIs não dependem dos estados, o que elimina o requisito de invariância positiva presente nas abordagens descritas nos Capítulos 6 e 7; (ii) Leva em conta distúrbios de medida e de saída que não são considerados nas abordagens anteriores e (iii) inclui-se parte dos equilíbrios conhecidos, o que diminui o conservadorismo dos resultados.

Uma condição necessária para estimar os verdadeiros parâmetros do sistema é que o ponto de equilíbrio dependa de todos os parâmetros a serem estimados. Entretanto, o resultado obtido dispensa o requisito de excitação persistente, que é comumente encontrado em métodos de identificação, sendo uma condição difícil de ser verificada no caso geral (FARZA et al., 2009).

9.1 TRABALHOS FUTUROS

Dentre as principais perspectivas de trabalho futuro merece destaque a redução do conservadorismo das LMIs. Uma melhoria significativa foi conseguida com as abordagens dos Capítulos 7 e 8, incluindo mais informações sobre o sistema a ser estimado. Outra direção de trabalho futuro é considerar a situação onde o sistema possui um sinal de entrada não constante. Isso poderia, eventualmente, melhorar as propriedades de convergência paramétrica, evitando as dificuldades apontadas na Seção 8.1. Seria interessante também

refazer a abordagem do Capítulo 7, que inclui o critério de custo garantido, incluindo as melhorias conseguidas no Capítulo 8.

Uma outra possibilidade interessante é encontrar condições sob as quais o problema pode ser resolvido com um número reduzido de variáveis de medição. Os resultados indicam que o número de parâmetros que pode-se estimar pelo método proposto é igual ao número de variáveis de medição mais um, uma exigência semelhante à encontrada na abordagem baseada no Filtro de Kalman Estendido para a estimação de parâmetros. A extensão dos resultados para outras classes de sistemas também é de interesse.

O observador chaveado proposto no Capítulo 5 refere-se a observadores de ordem completa, uma vez que são utilizados para observar todas as variáveis de estado $x(t)$. Uma outra possível extensão do resultado proposto é projetar um observador de ordem reduzida, estimando apenas os estados que não podem ser obtidos diretamente de $y(t)$. A vantagem direta dessa perspectiva é a redução da dimensão do observador.

Quando o observador proposto é utilizado para atenuar o distúrbio, como no Capítulo 8, essa atenuação depende tanto da parte contínua do observador, representada pela realimentação do sinal de medida, quanto da parcela descontínua, que depende de θ . Outro possível caminho de pesquisa futura é avaliar e explorar como o chaveamento afeta essa atenuação.

9.2 PUBLICAÇÕES

Como resultado dessa tese, obtiveram-se as seguintes publicações:

- PINTO, L. P. G.; TROFINO, A. State and parameter estimation based on switched observers - an LMI approach. **American Control Conference 2014, Portland, OR**, Portland, OR, 2014a.
- PINTO, L. P. G.; TROFINO, A. Switched observers for state and parameter estimation with guaranteed cost. **19th IFAC World Congress**, Cape Town, South Africa, 2014b.
- PINTO, L. P. G.; TROFINO, A. Switched observers for state and parameter estimation with disturbance attenuation. **IEEE TAC (submetido)**, 2015.

REFERÊNCIAS

- APKARIAN, P.; TUAN, H. D. Parameterized lmis in control theory. **SIAM Journal on Control and Optimization**, SIAM, v. 38, n. 4, p. 1241–1264, 2000.
- BAVDEKAR, V. et al. Constrained dual ensemble kalman filter for state and parameter estimation. In: IEEE. **American Control Conference**. Washington, DC, 2013. p. 3093–3098.
- BAVDEKAR, V. A.; DESHPANDE, A. P.; PATWARDHAN, S. C. Identification of process and measurement noise covariance for state and parameter estimation using extended kalman filter. **Journal of Process Control**, v. 21, n. 4, p. 585–601, 2011.
- BHATTACHARYYA, S.; SOUZA, E. D. Pole assignment via sylvester's equation. **Systems & Control Letters**, Elsevier, v. 1, n. 4, p. 261–263, 1982.
- BOYD, S. et al. Linear matrix inequalities in system and control theory. **Proceedings of the IEEE**, SIAM, v. 85, n. 4, p. 698–699, 1997.
- CHEN, C.-T. **Linear System Theory and Design**. New York, NY, USA: Oxford University Press, Inc., 1995.
- COELHO, A. A. R.; COELHO, L. dos S. **Identificação de sistemas dinâmicos lineares**. Florianópolis, Santa Catarina: Editora da UFSC, 2004.
- COUTINHO, D. et al. Robust guaranteed cost filtering for a class of nonlinear systems. v. 1, p. 33–40, July 2003.
- COUTINHO, D. F. et al. Robust linear H_∞ filter design for a class of uncertain nonlinear systems: An lmi approach. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 48, n. 3, p. 1452–1472, 2009.
- DASGUPTA, S.; ANDERSON, B.; TSOI, A. C. Input conditions for continuous-time adaptive systems problems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 35, n. 1, p. 78–82, 1990.
- DAVILA, J.; BASIN, M.; FRIDMAN, L. Finite-time parameter identification via high-order sliding mode observer. p. 2960–2964, June 2010. ISSN 0743-1619.
- DEBNATH, L.; MIKUSIŃSKI, P. **Hilbert spaces with applications**. London, UK: Academic press, 2005.

- DECARLO, R. et al. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. **Proceedings of the IEEE**, IEEE, v. 88, n. 7, p. 1069–1082, 2000.
- DOCHAIN, D. State and parameter estimation in chemical and biochemical processes: a tutorial. **Journal of Process Control**, Elsevier, v. 13, n. 8, p. 801–818, 2003.
- EMEL'YANOV, S. Sistemy avtomaticheskogo upravleniya s peremennoi strukturoi (automatic control systems with variable structure). **Moscow: Nauka**, 1967.
- FARZA, M. et al. Adaptive observers for nonlinearly parameterized class of nonlinear systems. **Automatica**, Elsevier, v. 45, n. 10, p. 2292–2299, 2009.
- FILIPPOV, A. F. **Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides: Control Systems**. Dordrecht, The Netherlands: Springer Science & Business Media, 1988.
- FRANK, P. M.; DING, X. Survey of robust residual generation and evaluation methods in observer-based fault detection systems. **Journal of process control**, Elsevier, v. 7, n. 6, p. 403–424, 1997.
- FRIDMAN, L.; LEVANT, A.; DAVILA, J. High-order sliding-mode observation and identification for linear systems with unknown inputs. p. 5567–5572, Dec 2006.
- FRIDMAN, L.; LEVANT, A.; DAVILA, J. Observation of linear systems with unknown inputs via high-order sliding-modes. **International Journal of Systems Science**, Taylor & Francis, v. 38, n. 10, p. 773–791, 2007.
- GAO, H.; LI, X. **Robust Filtering for Uncertain Systems**. Switzerland: Springer International Publishing, 2014.
- GHAOUI, L. E.; NICULESCU, S.-I. Advances in linear matrix inequality methods in control. In: GHAOUI, L. E.; NICULESCU, S.-I. (Ed.). Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000. p. 3–37. ISBN 0898714389.
- GOODWIN, G. C.; PAYNE, R. L. Dynamic system identification: experiment design and data analysis. Academic press, New York, 1977.
- GOODWIN, G. C.; SIN, K. S. **Adaptive Filtering Prediction and Control**. New York, NY, USA: Dover Publications, Inc., 2009. ISBN 0486469328, 9780486469324.

- HINDI, H. A tutorial on convex optimization ii: duality and interior point methods. p. 11 pp.–, June 2006.
- ISERMANN, R. Identification of dynamic systems. **Mechatronic Systems: Fundamentals**, Springer, p. 293–332, 2005.
- ISIDORI, A. **Nonlinear control systems**. New York: Springer, 1995.
- KAILATH, T. **Linear systems**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1980.
- KALMAN, R. On the general theory of control systems. **IRE Transactions on Automatic Control**, v. 4, n. 3, p. 110–110, 1959.
- KRENER, A. J.; ISIDORI, A. Linearization by output injection and nonlinear observers. **Systems & Control Letters**, Elsevier, v. 3, n. 1, p. 47–52, 1983.
- LASDON, L. S. **Optimization theory for large systems**. New York, N.Y.: Macmillan, 1970.
- LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results. **Automatic control, IEEE Transactions on**, IEEE, v. 54, n. 2, p. 308–322, 2009.
- LJUNG, L. **System identification: theory for the user**. New Jersey: [s.n.], 1987.
- LUENBERGER, D. Introduction to dynamic systems: theory, models, and applications. Wiley, 1979.
- LUENBERGER, D. G. **Determining the state of a linear system with observers of low dynamic order**. Stanford, California: Department of Electrical Engineering, Stanford University, 1963.
- MIKLEŠ, J.; FIKAR, M. **Process modelling, identification, and control**. New York: Springer, 2007.
- MOORE, J. B. Convergence of continuous time stochastic els parameter estimation. **Stochastic processes and their applications**, Elsevier, v. 27, p. 195–215, 1987.
- PATTON, R.; CHEN, J. Advances in fault diagnosis using analytical redundancy. p. 6/1–6/12, Jan 1993.
- PETERSEN, J.; MCFARLANE, D. Robust state estimation for uncertain systems. p. 2630–2631, 1991.

PINTO, L. P. G.; TROFINO, A. Switched observers for state and parameter estimation with guaranteed cost. **19th IFAC World Congress**, Cape Town, South Africa, 2014.

PINTO, L. P. G.; TROFINO, A. Switched observers for state and parameter estimation with disturbance attenuation. **IEEE Transactions on Automatic Control (submitted)**, IEEE, 2015.

POSTOYAN, R. et al. Parameter and state estimation for a class of neural mass models. p. 2322–2327, 2012.

RAO, S.; BUSS, M.; UTKIVN, V. Simultaneous state and parameter estimation in induction motors using first and second-order sliding modes. **Transactions on Industrial Electronics**, IEEE, v. 56, n. 9, p. 3369–3376, 2009.

SENGER, G.; TROFINO, A. Switching rule design for a class of switched systems with uncertain equilibrium. p. 4667–4672, Dec 2014.

SHIMKIN, N.; FEUER, A. Persistency of excitation in continuous-time systems. **Systems & control letters**, Elsevier, v. 9, n. 3, p. 225–233, 1987.

SILVEIRA, H.; TROFINO, A. Asymptotic stability of uncertain nonlinear systems with non-strict lyapunov functions. **to appear in the International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 0, n. 0, p. 0–0, 2015.

SINHA, N. K.; RAO, G. P. **Identification of continuous-time systems: Methodology and computer implementation**. Dordrecht, The Netherlands: Springer Science & Business Media, 2012.

SIRA-RAMIREZ, H. **Nonlinear pulse-width-modulation controller design**. Amsterdam, Holland: Elsevier Science, 1993. 33–58 p.

SÖDERSTRÖM, T.; STOICA, P. **System identification**. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1988.

SOUZA, C. E. de; TROFINO, A. Advances in linear matrix inequality methods in control. In: GHAOUI, L. E.; NICULESCU, S.-I. (Ed.). Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000. cap. A Linear Matrix Inequality Approach to the Design of Robust H_2 Filters, p. 175–185. ISBN 0898714389.

SOUZA, W. de et al. On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using takagi–sugeno fuzzy models. **Fuzzy Systems, IEEE Transactions on**, IEEE, v. 22, n. 6, p. 1720–1727, 2014.

TROFINO, A.; DEZUO, T. Lmi stability conditions for uncertain rational nonlinear systems. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Wiley Online Library, v. 24, n. 18, p. 3124–3169, 2014.

TROFINO, A. et al. Stabilizing switching rule design for affine switched systems. **50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference**, p. 1183–1188, 2011.

TROFINO, A. et al. Stabilizing switching rule design for affine switched systems. p. 1183–1188, 2011.

TYUKIN, I. Y. et al. Adaptive observers and parametric identification for systems in non-canonical adaptive observer form. n. arXiv:0903.2361, Mar 2009. Comments: Preliminary version is presented at the 17-th IFAC World Congress, 6-11 Seoul, 2008.

UTKIN, V. Principles of identification using sliding regimes. v. 26, p. 271, 1981.

UTKIN, V. I.; GULDNER, J.; SHI, J. **Sliding mode control in electromechanical systems**. 2nd. ed. London: CRC press, 2009.

VERHAEGEN, M.; VERDULT, V. **Filtering and System Identification: A Least Squares Approach**. 1st. ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2007. ISBN 0521875129, 9780521875127.

WENZEL, T. A. et al. Dual extended kalman filter for vehicle state and parameter estimation. **Vehicle System Dynamics**, Taylor & Francis, v. 44, n. 2, p. 153–171, 2006.

YAN, X.-G.; SPURGEON, S. K.; EDWARDS, C. State and parameter estimation for nonlinear delay systems using sliding mode techniques. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 58, n. 4, p. 1023–1029, 2013.

ZHANG, Q. Revisiting different adaptive observers through a unified formulation. p. 3067–3072, 2005.

ZHOU, Y.; SOH, Y. C.; SHEN, J. X. Speed estimation and nonmatched time-varying parameter identification for a dc motor with hybrid sliding-mode observer. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, IEEE, v. 60, n. 12, p. 5539–5549, 2013.